

Є. П. Нелін

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

(профільний рівень)

підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти

Харків
Видавництво «Ранок»
2018

УДК [37.016:512](075.3)
Н49

Нелін Є. П.

Н49 Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / [Є. П. Нелін]. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018.
ISBN

УДК [37.016:512](075.3)



Інтернет-підтримка
Електронні матеріали
до підручника розміщено на сайті
interactive.ranok.com.ua

ISBN

© Нелін Є. П., 2018
© ТОВ Видавництво «Ранок», 2018

ЗМІСТ

Як користуватися підручником	7
------------------------------------	---

Розділ 1. Функції, многочлени, рівняння і нерівності

§ 1. Множини	10
1.1. Множини та операції над ними	8
1.2. Числові множини. Множина дійсних чисел	17
§ 2. Функції	27
2.1. Поняття числової функції. Найпростіші властивості числових функцій	27
2.2. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій	39
2.3. Обернена функція	49
§ 3. Рівняння і нерівності	55
§ 4. Застосування властивостей функцій до розв’язування рівнянь	65
§ 5. Графіки рівнянь та нерівностей з двома змінними	67
§ 6. Метод математичної індукції	71
§ 7. Многочлени від однієї змінної та дії над ними	73
7.1. Означення многочленів від однієї змінної та їх тотожна рівність	73
7.2. Дії над многочленами. Ділення многочлена на многочлен з остачею	75
7.3. Теорема Безу. Корені многочлена. Формули Вієта	76
§ 8. Рівняння і нерівності, що містять знак модуля	77
§ 9. Рівняння і нерівності з параметрами	81
9.1. Розв’язування рівнянь і нерівностей з параметрами	81
9.2. Дослідницькі задачі з параметрами	85
9.3. Використання умов розміщення коренів квадратного тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ відносно заданих чисел A і B	87
Тест № 1	89
Навчальний проект № 1	90
Додаткові вправи до розділу	91
Відомості з історії	92

Розділ 2. Степенева функція

§ 10. Корінь n -го степеня та його властивості. Функція ($a \neq 0$) та її графік	94
§ 11. Ірраціональні рівняння	102
§ 12. Узагальнення поняття степеня. Степенева функція, її властивості та графік	104
12.1. Узагальнення поняття степеня	104
12.2. Степенева функція, її властивості та графік	107
§ 13. Застосування властивостей функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь	112
13.1. Приклади застосування властивостей функцій до розв'язування ірраціональних рівнянь	112
13.2. Приклади використання інших способів розв'язування ірраціональних рівнянь	114
§ 14. Ірраціональні нерівності	116
§ 15. Розв'язування ірраціональних рівнянь та нерівностей з параметрами	119
Тест № 2	121
Теми навчальних проектів	121
Додаткові вправи до розділу	122
Відомості з історії	124

Розділ 3. Тригонометричні функції

§ 16. Радіанна міра кутів	126
§ 17. Тригонометричні функції кута і числового аргумента	128
§ 18. Властивості тригонометричних функцій	131
§ 19. Графіки функцій синуса, косинуса, тангенса і котангенса та їх властивості	135
19.1. Графік функції $y = \sin x$ та її властивості	135
19.2. Графік функції $y = \cos x$ та її властивості	137
19.3. Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ та її властивості	139
19.4. Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ та її властивості	141
§ 20. Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргумента	145
§ 21. Формули додавання та наслідки з них	147
21.1. Формули додавання	147
21.2. Формули подвійного аргумента	149
21.3. Формули зведення	151
21.4. Формули суми і різниці однойменних тригонометричних функцій та формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму	152

§ 22. Додаткові формули тригонометрії. Формули потрійного та половинного аргументів. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргумента	154
Тест № 3	156
Навчальний проект	157
Теми навчальних проектів	158
Додаткові вправи до розділу	158
Відомості з історії	160

Розділ 4. Тригонометричні рівняння і нерівності

§ 23. Обернені тригонометричні функції	162
23.1. Функція $y = \arcsin x$	162
23.2. Функція $y = \arccos x$	163
23.3. Функція $y = \arctg x$	165
23.4. Функція $y = \operatorname{arccotg} x$	166
§ 24. Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь	167
24.1. Рівняння $\cos x = a$	168
24.2. Рівняння $\sin x = a$	169
24.3. Рівняння $\operatorname{tg} x = a$ і $\operatorname{ctg} x = a$	170
§ 25. Розв'язування тригонометричних рівнянь	172
25.1. Заміна змінних при розв'язуванні тригонометричних рівнянь	172
25.2. Розв'язування тригонометричних рівнянь зведенням до однієї функції (з однаковим аргументом)	173
25.3. Розв'язування однорідних тригонометричних рівнянь та зведення тригонометричного рівняння до однорідного	174
25.4. Розв'язування тригонометричних рівнянь виду $f(x) = 0$ за допомогою розкладання на множники	175
25.5. Відбір коренів тригонометричних рівнянь	176
§ 26. Системи тригонометричних рівнянь. Складніші тригонометричні рівняння та їх системи	178
26.1. Розв'язування систем тригонометричних	178
26.2. Приклади розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь та їх систем	179
§ 27. Тригонометричні рівняння з параметрами	183
27.1. Розв'язування рівнянь з параметрами	183
27.2. Дослідницькі задачі з параметрами	185
§ 28. Розв'язування тригонометричних нерівностей	187
Тест № 4	192
Теми навчальних проектів	193
Додаткові вправи до розділу	194
Відомості з історії	196

Розділ 5. Границя та неперервність функції. Похідна та її застосування

§ 29. Поняття границі функції в точці та неперервності функції	198
§ 30. Основні властивості границі функції	202
30.1. Доведення основних теорем про границі	202
30.2. Односторонні границі	206
30.3. Неперервні функції	207
30.4. Границя відношення $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$	208
30.5. Границя функції на нескінченності. Нескінченна границя функції. Границя послідовності	209
30.6. Практичне обчислення границі функції	211
§ 31. Поняття похідної, її фізичний і геометричний зміст	213
§ 32. Правила обчислення похідних. Похідна складеної функції	219
§ 33. Похідні елементарних функцій	223
§ 34. Застосування похідної до дослідження функцій	225
34.1. Застосування похідної до знаходження проміжків зростання і спадання та екстремумів функції	225
34.2. Загальна схема дослідження функції для побудови її графіка	235
34.3. Найбільше і найменше значення функції	239
§ 35. Асимптоти графіка функції	246
§ 36. Похідні обернених тригонометричних функцій. Доведення тотожностей за допомогою похідної	249
§ 37. Друга похідна й похідні вищих порядків. Поняття опуклості функції	251
§ 38. Застосування похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей та доведення нерівностей	252
38.1. Застосування похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей	252
38.2. Застосування похідної до доведення нерівностей	256
§ 39. Застосування похідної до розв'язування завдань з параметрами	260
Тест № 5	262
Теми навчальних проєктів	263
Додаткові вправи до розділу	263
Відомості з історії	265
Відповіді та вказівки до вправ	266
Предметний покажчик	271

Шановні десятикласники і десятикласниці!

Ви починаєте вивчати новий предмет — «Алгебра і початки аналізу», який об'єднує матеріал кількох галузей математичної науки.

Як і в курсі алгебри, значну увагу будемо приділяти розв'язуванню рівнянь та розгляду властивостей функцій. Але поряд із розв'язуванням знайомих завдань, пов'язаних із раціональними дробами, степенями і коренями, у 10 класі ви познайомитеся з новими видами функцій — степеневими і тригонометричними, відповідними рівняннями й нерівностями, а також принципово новими поняттями — похідною та границею функції. Саме вивчення границі та похідної і є одним із завдань математичного аналізу.

Математичний аналіз (або просто аналіз) — галузь математики, що сформувалася у XVIII ст. і відіграла значну роль у розвитку природничих наук завдяки появі нового потужного універсального методу дослідження функцій, які застосовують під час розв'язування різноманітних прикладних задач.

У попередніх класах ви вже починали знайомитися з функцією. У цьому році ви навчитесь досліджувати функції на новому рівні з використанням нових математичних інструментів.

Як користуватися підручником

Підручник має п'ять розділів, кожний із яких складається з параграфів, деякі параграфи — з пунктів. Параграфи і пункти, як правило, містять такі структурні блоки.

Довідкові таблиці наведені на початку більшості параграфів (пунктів) і вміщують основні означення, ознаки та властивості розглядуваних понять теми, систематизацію теоретичного матеріалу та *способів діяльності* з цим матеріалом у формі спеціальних *орієнтирів з розв'язування завдань*. Радимо опрацювати цей матеріал у першу чергу, а вже після цього переходити до наступного блоку.

Пояснення й обґрунтування являють собою докладне викладення теоретичного матеріалу, наведеного в таблицях. Таке подання навчального матеріалу (спочатку структурованого у вигляді таблиць, а потім описаного детально) дозволить кожному з вас вибирати свій власний рівень ознайомлення з обґрунтуваннями, будуючи власну освітню траєкторію.

Приклади розв'язування завдань ознайомлять вас із основними ідеями щодо розв'язування завдань, допоможуть усвідомити й засвоїти способи дій з основними алгебраїчними поняттями, набути необхідних предметних компетентностей. Для того щоб виділити орієнтовні основи діяльності з розв'язування завдань (загальні орієнтири), у прикладах власне розв'язання супроводжуються коментарями, які допоможуть вам скласти план розв'язування аналогічних завдань.

Розв'язання	Коментар
Як можна записати розв'язання завдання	Як можна міркувати під час розв'язування такого завдання

За такого подання коментар не заважає сприйняттю основної ідеї розв'язання завдань певного типу і дає змогу за потреби отримати детальну консультацію щодо розв'язування, яка міститься в коментарі.

З метою закріплення, контролю і самоконтролю засвоєння навчального матеріалу наприкінці кожного параграфу запропоновано систему запитань і вправ.

Запитання для контролю допоможуть вам пригадати й осмислити вивчене, звернути увагу на головне в параграфі, оцінити рівень засвоєння теоретичного матеріалу параграфу.

Вправи подано за трьома рівнями складності:

- *задачі середнього рівня* мають позначку «°»;
- *задачі достатнього рівня* (дещо складніші) подано без позначки;
- *задачі високого рівня* мають позначку «*».

До більшості вправ наприкінці підручника наведено *відповіді*.

У рубриці **«Виявіть свою компетентність»** наведено задачі практичного змісту та завдання, які для отримання розв'язку вимагають аналізу, узагальнення, систематизації набутих знань.

Зверніть також увагу на запропоновані в тексті параграфів супроводжуючі запитання, що спонукають до більш глибокого самостійного осмислення навчального матеріалу, та завдання, виконання яких, на нашу думку, сприятиме формуванню певних предметних та ключових компетентностей. Ці запитання та завдання мають відповідні позначення.

Матеріали рубрик **«Відомості з історії»**, **«Видатні математики»** допоможуть вам дослідити розвиток алгебри як науки та дізнатися про досягнення видатних учених України.

Для того щоб підручник допоміг вам у повній мірі, радимо ознайомитися із системою умовних позначень:

- початок обґрунтування твердження;
- закінчення обґрунтування твердження;
- ▶ початок розв'язання задачі;
- ◀ закінчення розв'язання задачі;
- ❓ запитання до учнів;
- ❗ цікава інформація або така, яку варто обміркувати;
- і матеріали, пов'язані з ІКТ;
- 🧩 завдання, які вимагають самостійного опрацювання, сприяють активізації розумової діяльності;
- 👥 діяльність, розрахована на роботу в команді.

Розділ 1

ФУНКЦІЇ, МНОГОЧЛЕНИ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ



§ 1

МНОЖИНИ

1.1. Множини та операції над ними

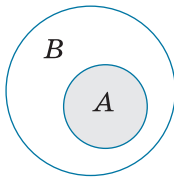
Таблиця 1

Поняття множини та її елементів

Елемент a належить множині A	$\Leftrightarrow$	$a \in A$
Елемент b не належить множині A	$\Leftrightarrow$	$b \notin A$
У множині немає елементів	$\Leftrightarrow$	$\emptyset$

Множину можна уявити собі як сукупність деяких об'єктів, що об'єднані за якоюсь ознакою. У математиці множини — це одне з основних неозначуваних понять. Кожний об'єкт, що входить до множини A , називається *елементом цієї множини*.

Множина, що не містить жодного елемента, називається *порожньою множиною* і позначається $\emptyset$

Підмножина ($\subset$)

$$A \subset B \Leftrightarrow \text{Якщо } x \in A, \text{ то } x \in B$$

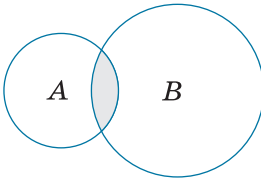
Якщо кожний елемент однієї множини A є елементом другої множини B , то кажуть, що перша множина A є підмножиною другої множини B , і записують так: $A \subset B$.

Використовують також запис $A \subseteq B$, якщо множина A або є підмножиною множини B , або дорівнює множині B

Рівність множин

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$$

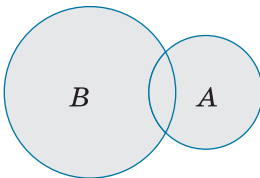
Дві множини називаються *рівними*, якщо кожний елемент першої множини є елементом другої множини, і навпаки, кожний елемент другої множини є елементом першої множини

Переріз множин ($\cap$)

$$C = A \cap B$$

$$x \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ і } x \in B$$

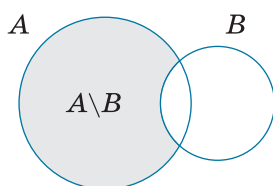
Перерізом множин A і B називають їх спільну частину, тобто множину C всіх елементів, що належать як множині A , так і множині B

Об'єднання множин ($\cup$)

$$C = A \cup B$$

$$x \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ або } x \in B$$

Об'єднанням множин A і B називають множину C , складену з усіх елементів, що належать хоча б одній із цих множин (A або B)

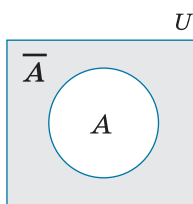
Різниця множин ($\setminus$)

$$C = A \setminus B$$

$$x \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ і } x \notin B$$

Різницею множин A і B називається множина C , що складається з усіх елементів, які належать множині A і не належать множині B

Доповнення множин



$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$$

Якщо всі множини, які ми розглядаємо, є підмножинами якоїсь так званої *універсальної* множини U , то різниця $U \setminus A$ називається *доповненням* множини A . Тобто *доповненням* множини A називається множина, яка складається з усіх елементів, які не належать множині A (але належать універсальній множині U)

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття множини

Одним з основних понять, які використовують у математиці, є поняття *множини*. Для нього не дають означення. Можна пояснити, що *множиною* називають довільну сукупність об'єктів, а самі об'єкти — *елементами* даної множини.

Так, можна говорити про множину дітей на гральному майданчику (елементи — діти), множину днів тижня (елементи — дні тижня), множину натуральних дільників числа 6 (елементи — числа 1, 2, 3, 6) тощо. У курсах алгебри та алгебри і початків аналізу найчастіше розглядають множини, елементами яких є числа, і тому їх називають *числовими множинами*.

Як правило, множини позначають великими літерами латинського алфавіту. Наприклад, якщо множина M складається із чисел 1; 2; 3, то її позначають так: $M = \{1; 2; 3\}$. Той факт, що число 2 входить до цієї множини (є елементом даної множини M), записують за допомогою спеціального знака « $\in$ » так: $2 \in M$; а те, що число 5 не входить до цієї множини (не є елементом даної множини), записують так: $5 \notin M$.

Можна розглядати також множину, яка не містить жодного елемента, — *порожню множину*.

Наприклад, множина простих дільників числа 1 — порожня множина.

Для деяких множин існують спеціальні позначення. Так, порожню множину позначають символом $\emptyset$, множину всіх натуральних чисел — літерою N , множину всіх цілих чисел — літерою Z , множину всіх раціональних чисел — літерою Q , а множину всіх дійсних чисел — літерою R . Множини бувають *скінченні* й *нескінченні* залежно від того, яку кількість елементів вони містять. Так, множини $A = \{7\}$ і $M = \{1; 2; 3\}$ — скінченні, бо містять скінченне число елементів, а множини N, Z, Q, R — нескінченні.

Множини задають або за допомогою переліку їх елементів (це можна зробити лише для скінченних множин), або за допомогою опису, коли задається правило — *характеристична властивість*, — яке дозволяє визначити, чи належить даний об'єкт розглядуваній множині. Наприклад, множина $A = \{-1; 0; 1\}$ задана переліком

елементів, а множина B парних цілих чисел — характеристичною властивістю елементів множини. Останню множину записують так: $B = \{b \mid b \text{ — парне ціле число}\}$ або так: $B = \{b \mid b = 2m, \text{ де } m \in \mathbb{Z}\}$ — тут після вертикальної риски записано характеристичну властивість¹.

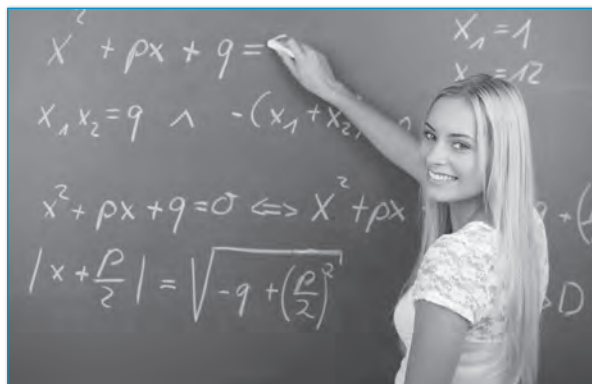
У загальному вигляді запис за допомогою характеристичної властивості виглядає так: $A = \{x \mid P(x)\}$, де $P(x)$ — характеристична властивість. Наприклад, $\{x \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}$, $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ і } x^2 + 1 = 0\} = \emptyset$.

2 Рівність множин

Нехай A — множина цифр трицифрового числа 312, тобто $A = \{3; 1; 2\}$, а B — множина натуральних чисел, менших від 4, тобто $B = \{1; 2; 3\}$. Оскільки ці множини складаються з одних і тих самих елементів, то їх вважають рівними. Це записують так: $A = B$. Установити рівність нескінченних множин таким способом (порівнюючи всі елементи) неможливо. Тому в загальному випадку рівність множин означають таким чином.

Означення. Дві множини називаються рівними, якщо кожний елемент першої множини є елементом другої множини і, навпаки, кожний елемент другої множини є елементом першої множини.

Із наведеного означення рівних множин випливає, що у множині однакові елементи не розрізняються. Дійсно, наприклад, $\{1; 2; 2\} = \{1; 2\}$, оскільки кожний елемент першої множини (1 або 2) є елементом другої множини і, навпаки, кожний елемент другої множини (1 або 2) є елементом першої. Тому, записуючи множину, найчастіше кожний її елемент записують тільки один раз і, відповідно, при підрахунку кількості елементів множини кожен елемент рахують тільки один раз, тобто множина $\{1; 2; 2\}$ містить тільки два елементи.



3 Підмножина

Означення. Якщо кожний елемент однієї множини A є елементом множини B , то перша множина A називається підмножиною множини B .

Це записують так: $A \subset B$.

Наприклад, $\{1; 2\} \subset \{0; 1; 2; 3\}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (оскільки будь-яке натуральне число — ціле), $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (оскільки будь-яке ціле число — раціональне), $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (оскільки будь-яке раціональне число — дійсне).

Вважають, що завжди $\emptyset \subset A$, тобто порожня множина є підмножиною будь-якої непорожньої множини.

Іноколи замість запису $A \subset B$ використовують також запис $A \subseteq B$, якщо множина A або є підмножиною множини B , або дорівнює множині B . Наприклад, $A \subseteq A$.

Порівнюємо означення рівних множин з означенням підмножини. Якщо множини A і B рівні, то:

- 1) кожний елемент множини A є елементом множини B , отже, A — підмножина B ($A \subseteq B$);
- 2) кожний елемент множини B є елементом множини A , отже, B — підмножина A ($B \subseteq A$).

Таким чином, дві множини рівні, якщо кожна з них є підмножиною іншої.

Іноколи співвідношення між множинами зручно ілюструвати за допомогою кругів

¹ У цьому випадку, а також у записах розв'язків тригонометричних рівнянь і нерівностей в розділі 4 запис $m \in \mathbb{Z}$ означає, що m набуває будь-якого цілого значення. Це також можна записати так: $m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$

(які часто називають кругами Ейлера — Венна). Наприклад, рис. 1.1.1 ілюструє означення підмножини, а рис. 1.1.2 — співвідношення між множинами N, Z, Q, R .

4 Операції над множинами

Над множинами можна виконувати певні дії: знаходити переріз, об'єднання, різницю множин. Дамо означення цих операцій і проілюструємо їх за допомогою кругів Ейлера — Венна.

Означення. *Перерізом множин A і B називається їхня спільна частина, тобто множина C усіх елементів, що належать як множині A , так і множині B .*

Переріз множин позначають знаком « $\cap$ ». На рис. 1.1.3 наведено ілюстрацію означення перерізу множин.

Наприклад, якщо $A = \{2; 3; 4\}$, $B = \{0; 2; 4; 6\}$, то $A \cap B = \{2; 4\}$.

Означення. *Об'єднанням множин A і B називається множина C , що складається з усіх елементів, які належать хоча б одній із цих множин (A або B).*

Об'єднання множин позначають знаком « $\cup$ ». На рис. 1.1.4 наведено ілюстрацію означення об'єднання множин. Наприклад, для розглянутих вище множин A і B $A \cup B = \{0; 2; 3; 4; 6\}$.

Якщо позначити множину ірраціональних чисел через M , то $M \cup Q = R$.

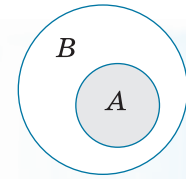
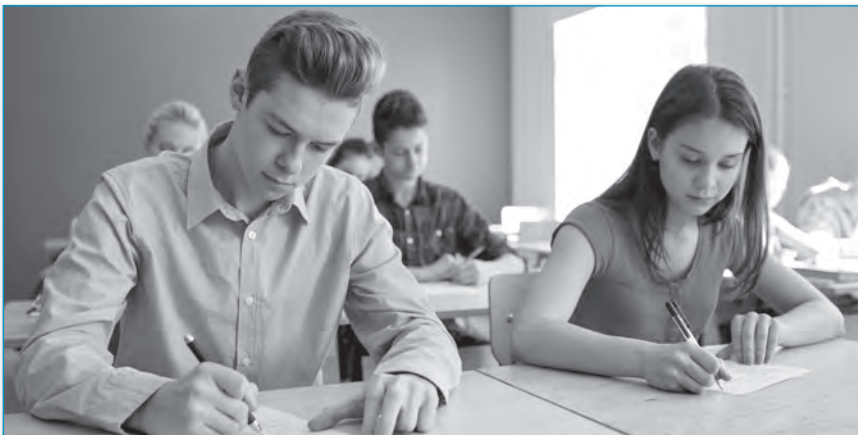
Означення. *Різницею множин A і B називається множина C , яка складається з усіх елементів, які належать множині A і не належать множині B .*

Різницю множин позначають знаком « $\setminus$ ». На рис. 1.1.5 наведено ілюстрацію означення різниці множин.

Наприклад, якщо $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4; 5\}$, то $A \setminus B = \{1\}$, а $B \setminus A = \{4; 5\}$.

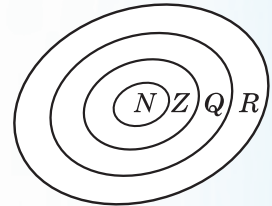


Наведіть приклади множин, різниці та об'єднання множин з повсякденного життя.

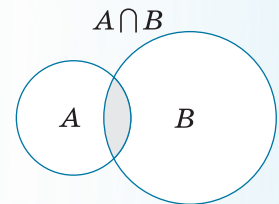


$$A \subset B \Leftrightarrow \text{Якщо } x \in A, \text{ то } x \in B$$

◆ Рис. 1.1.1

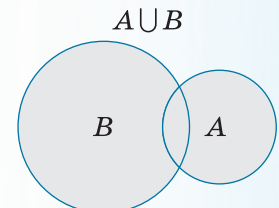


◆ Рис. 1.1.2



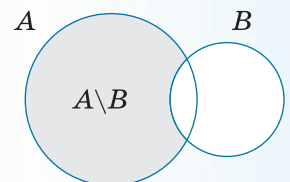
$$C = A \cap B \\ x \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ і } x \in B$$

◆ Рис. 1.1.3



$$C = A \cup B \\ x \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ або } x \in B$$

◆ Рис. 1.1.4



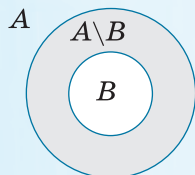
$$C = A \setminus B \\ x \in C \Leftrightarrow x \in A \text{ і } x \notin B$$

◆ Рис. 1.1.5

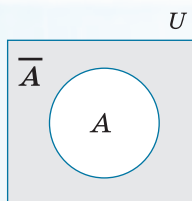
Якщо B — підмножина A , то різницю $A \setminus B$ називають *доповненням множини B до множини A* (рис. 1.1.6).

Наприклад, якщо знову позначити множину ірраціональних чисел через M , то $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} = M$. Кажуть, що множина M ірраціональних чисел доповнює множину $\mathbf{Q}$ раціональних чисел до множини $\mathbf{R}$ усіх дійсних чисел.

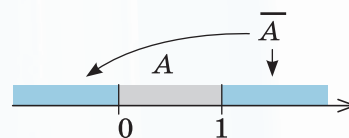
Якщо всі множини, які ми розглядаємо, є підмножинами якоїсь так званої *універсальної множини U* (на рисунку її зазвичай зображують у вигляді прямокутника, а всі інші множини — кругами всередині цього прямокутника), то різницю $U \setminus A$ називають *доповненням множини A* (рис. 1.1.7).



◆ Рис. 1.1.6



◆ Рис. 1.1.7



◆ Рис. 1.1.8

Означення. *Доповненням множини A називається множина, яка складається з усіх елементів, які не належать множині A , але які належать універсальній множині U .*

Доповнення множини A позначають $\bar{A}$ (читають: « A з рискою» або «доповнення A »).

Наприклад, якщо $U = \mathbf{R}$ і $A = [0; 1]$, то $\bar{A} = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. Для цього прикладу зручно використати традиційну ілюстрацію множини дійсних чисел на числовій прямій — рис. 1.1.8.

Запитання для контролю

1. Наведіть приклади множин, укажіть декілька елементів кожної множини.
2. Як позначають порожню множину, множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних чисел?
3. Дайте означення рівних множин. Наведіть приклади двох рівних множин.
4. Дайте означення підмножини. Наведіть приклади. Проілюструйте це поняття за допомогою кругів Ейлера — Венна.
5. Дайте означення перерізу, об'єднання, різниці двох множин. Проілюструйте їх за допомогою кругів Ейлера — Венна. Наведіть приклади.
6. Поясніть, що називають доповненням однієї множини до іншої; доповненням множини. Проілюструйте ці поняття за допомогою відповідних рисунків. Наведіть приклади.

Вправи

1.1.1°. Запишіть за допомогою фігурних дужок множину:

- 1) літер у слові «алгебра»;
- 2) парних одноцифрових натуральних чисел;
- 3) непарних одноцифрових натуральних чисел;
- 4) одноцифрових простих чисел.

- 1.1.2°.** За якою характеристичною властивістю записані такі множини:
- 1) {понеділок, вівторок, середа, четвер, п'ятниця, субота, неділя};
 - 2) {січень, лютий, березень, квітень, травень, червень, липень, серпень, вересень, жовтень, листопад, грудень};
 - 3) {Австралія, Азія, Америка, Антарктида, Африка, Європа};
 - 4) {до, ре, мі, фа, соль, ля, сі};
 - 5) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}?
- 1.1.3°.** Наведіть приклади порожніх множин.
- 1.1.4°.** Відомо, що A — множина натуральних чисел, розташованих між числами 15 і 35. Запишіть множину A за допомогою фігурних дужок. Які з чисел 18, 28, 36, 40 належать множині A ? Відповідь запишіть за допомогою знаків « $\in$ » і « $\notin$ ».
- 1.1.5°.** Запишіть за допомогою фігурних дужок і позначте множину:
- 1) натуральних дільників числа 12;
 - 2) натуральних дільників числа 30;
 - 3) цілих дільників числа 6;
 - 4) простих дільників числа 12.
- 1.1.6°.** Відомо, що $M = \{1; 2; 5\}$, $N = \{1; 4; 5; 7; 9\}$, $K = \{4; 7; 9\}$. Запишіть за допомогою фігурних дужок або знака $\emptyset$:
- 1) переріз M і N ;
 - 2) переріз M і K ;
 - 3) переріз N і K ;
 - 4) об'єднання M і N ;
 - 5) об'єднання M і K ;
 - 6) об'єднання N і K ;
 - 7) різницю M і N ;
 - 8) різницю M і K ;
 - 9) різницю N і K ;
 - 10) доповнення K до N .
- 1.1.7°.** Поясніть, чому виконуються такі рівності:
- 1) $A \cup \emptyset = A$;
 - 2) $A \cup A = A$;
 - 3) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
 - 4) $A \cap A = A$.
- 1.1.8°.** Запишіть множину всіх двоцифрових чисел, які можна записати за допомогою цифр 0, 1, 3.
- 1.1.9°.** Відомо, що A — множина натуральних дільників числа 12, а B — множина цілих дільників числа 6. Запишіть множини:
- 1) $A \cup B$;
 - 2) $A \cap B$;
 - 3) $A \setminus B$;
 - 4) $B \setminus A$.
- 1.1.10*.** Нехай A і B — деякі множини. Доведіть указані рівності та проілюструйте їх за допомогою кругів Ейлера — Венна:
- 1) $A \cup B = B \cup A$ — *переставний закон для об'єднання*;
 - 2) $A \cap B = B \cap A$ — *переставний закон для перерізу*.
- 1.1.11.** В одній множині 40 різних елементів, а в іншій — 30. Скільки елементів може бути в їх:
- 1) перерізі;
 - 2) об'єднанні?

1.1.12*. Нехай A, B, C — деякі множини. Доведіть указані рівності та проілюструйте їх за допомогою кругів Ейлера — Венна:

- 1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — *сполучний закон для об'єднання*,
- 2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — *сполучний закон для перерізу*;
- 3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
- 4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- 5) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;
- 6) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

закони

де Моргана.

1.1.13*. Доведіть рівності та проілюструйте їх за допомогою кругів Ейлера — Венна:

- 1) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;
- 2) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

1.1.14*. Запишіть множину всіх правильних дробів $\frac{a}{b}$, де $a \in A$, $b \in B$ і $A = \{2; 3; 4; 6\}$, $B = \{1; 3; 4; 5; 6\}$.

1.1.15*. Які трицифрові числа можна записати, якщо: $A = \{3; 1; 2\}$ — множина цифр для позначення їхніх сотень; $B = \{2; 8\}$ — множина цифр для позначення їхніх десятків; $C = \{5; 7\}$ — множина цифр для позначення їхніх одиниць? Скільки таких чисел одержимо? Спробуйте сформулювати загальне правило підрахунку кількості таких чисел, якщо множина A містить m елементів ($0 \notin A$), множина B — n елементів, множина C — k елементів.



Виявіть свою компетентність

1.1.16. Кожний учень у класі вивчає англійську або французьку мову. Англійську мову вивчають 25 осіб, французьку — 27, а обидві мови — 18. Скільки учнів у класі?

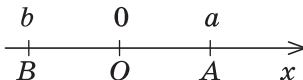


1.2. Числові множини. Множина дійсних чисел

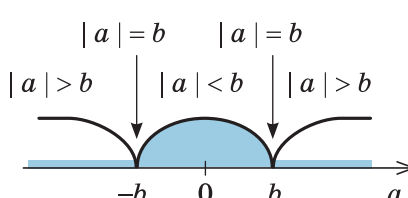
Таблиця 2

1. Числові множини		
Дійсні числа R		
Числа, які можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу		
Раціональні числа Q Можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число. Записують у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу $\left(\frac{1}{3} = 0,333... = 0,(3)\right)$	Ірраціональні числа Не можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число. Записують у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу $(\sqrt{2} = 1,4142135...)$	
Цілі числа Z Включають натуральні числа, числа, їм протилежні, та число 0	Дробові числа Числа, складені із цілого числа часток одиниці ($\frac{2}{5}$ — звичайний дріб; $1,23$ — десятковий дріб: $1,23 = \frac{123}{100}$)	
Натуральні числа N (цілі додатні) У шкільному курсі математики натуральне число — основне неозначуване поняття	Число 0 Таке число, що будь-яке число при додаванні до нього не змінюється $(a + 0 = 0 + a = a)$	Цілі від'ємні числа Числа, протилежні натуральним

2. Модуль дійсного числа та його властивості

Означення	Геометричний зміст модуля
Модулем додатного числа називається саме це число; модулем від'ємного числа називається число, йому протилежне; модуль нуля дорівнює нулю. $ a = \begin{cases} a & \text{при } a > 0, \\ 0 & \text{при } a = 0, \\ -a & \text{при } a < 0 \end{cases}$	 $ a = OA, \quad b = OB, \quad a - b = AB.$ На координатній прямій модуль — це відстань від початку координат до точки, що зображує дане число. Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між точками a і b на координатній прямій

Властивості модуля

1. $ a \geq 0$	Модуль будь-якого числа — невід'ємне число
2. $ -a = a $	Модулі протилежних чисел рівні
3. $a \leq a $, тобто $- a \leq a \leq a $	Величина числа не перевищує величини його модуля
4. При $b > 0$ $ a \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$ 5. При $b > 0$ $ a \geq b \Leftrightarrow a \leq -b$ або $a \geq b$	
6. $ a \cdot b = a \cdot b $	Модуль добутку дорівнює добутку модулів множників
7. $\left \frac{a}{b} \right = \frac{ a }{ b }$ ($b \neq 0$)	Модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю)
8. $ a^n = a ^n$, $ a ^2 = a^2$, $ a ^{2k} = a^{2k}$	
9. $ a+b \leq a + b $, $ a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n $	Модуль суми не перевищує суми модулів доданків
10. $ a - b \leq a \pm b \leq a + b $	

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Числові множини

У курсі математики ви зустрічалися з різними числами: натуральними, цілими, раціональними, ірраціональними, дійсними. Уявлення про числа у людства склалися поступово, під впливом вимог практики.

Наприклад, *натуральні числа* з'явилися у зв'язку з необхідністю підрахунку предметів. Але для того щоб дати відповідь на запитання «Скільки сірників у порожній коробці з-під сірників?», множини натуральних чисел $N = \{1; 2; 3; \dots\}$ недостатньо — для цього потрібно мати ще й число нуль.

Приєднуючи до множини N натуральних чисел число 0, одержуємо множину *невід'ємних цілих чисел*. Її часто позначають $N_0 = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$.

Одних тільки невід'ємних цілих чисел виявилось недостатньо для розв'язування практичних задач (а отже, і математичних задач, що відображують задану реальну ситуацію). Так, для того щоб охарактеризувати температуру повітря вище і нижче нуля чи рух тіла в протилежних напрямках, потрібні протилежні до натуральних числа, тобто *від'ємні числа*. Для натурального числа n протилежним вважають число $-n$, а для числа $-n$ протилежним

вважають число n . Нуль вважають числом, протилежним самому собі.

Натуральні числа, нуль і числа, протилежні натуральним, складають множину $\mathbb{Z}$ *цілих чисел*.

Вимірювання величин привело до необхідності розширення множини цілих чисел і введення *раціональних чисел*. Наприклад, середня багаторічна температура повітря в січні в м. Харків становить $-7,3^\circ\text{C}$, тривалість уроку — 45 хв, або $\frac{3}{4}$ год.

Таким чином, вибираючи якусь одиницю вимірювання, ми одержуємо числове значення величини, яке можна виразити за допомогою різних раціональних чисел — цілих і дробових, додатних і від'ємних.

Цілі й дробові числа складають множину $\mathbb{Q}$ *раціональних чисел*.

Будь-яке раціональне число можна записати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ (тобто чисельник m є цілим числом, а знаменник n — натуральним).

Раціональне число можна записати різними дробами. Наприклад,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20}, \quad -\frac{2}{7} = \frac{-2}{7} = \frac{-8}{28} = \frac{-10}{35},$$

$$1,2 = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = \frac{120}{100}, \quad 5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{50}{10}.$$

Як видно з наведених прикладів, серед дробів, що зображують дане раціональне число, завжди є єдиний нескоротний дріб (для цілих чисел — це дріб, знаменник якого дорівнює 1).

Зауважимо, що раціональне число, записане у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, можна записати також у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу, поділивши чисельник на знаменник. Наприклад, $\frac{3}{4} = 0,75$, $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$

Домовилися зображувати скінченний десятковий дріб у вигляді нескінченного, у якого після останнього десяткового знака, відмінного від нуля, на місці наступ-

них десяткових знаків записані нулі, наприклад,

$$\frac{3}{4} = 0,75 = 0,7500\dots$$

Також домовилися записувати цілі числа у вигляді нескінченного десяткового дробу, у якого праворуч від коми на місці десяткових знаків стоять нулі, наприклад $13 = 13,000\dots$. Таким чином, будь-яке раціональне число може бути записане як нескінченний періодичний дріб. Нагадаємо, що у нескінченного періодичного дробу, починаючи з деякого місця, усі десяткові знаки повторюються. Групу цифр, що повторюється, називають *періодом дробу*, у записі дробу період наводять у дужках.

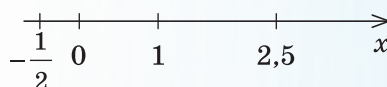
$$\text{Наприклад, } \frac{1}{3} = 0,3333\dots = 0,(3),$$

$$\frac{3}{22} = 0,136363636\dots = 0,1(36).$$

Отже, кожне раціональне число може бути записане у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу і, навпаки, кожний нескінченний періодичний десятковий дріб задає раціональне число.

Зауважимо, що будь-який періодичний десятковий дріб, який має своїм періодом дев'ятку, дорівнює нескінченному десятковому дробу з періодом нуль, у якого десятковий розряд, що передує періоду, збільшений на одиницю порівняно з відповідним розрядом першого дробу. У подальшому, записуючи раціональні числа за допомогою нескінченних періодичних десяткових дробів, не розглядатимемо нескінченні періодичні дроби, період яких дорівнює дев'яти.

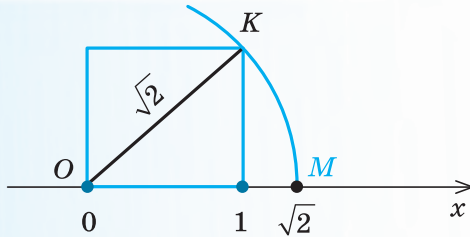
Кожне раціональне число можна зобразити точкою на координатній прямій (тобто на прямій, на якій вибрано початок відліку, додатний напрям і одиницю виміру). Наприклад, на рис. 1.2.1 зображено декілька раціональних чисел $\left(0; 1; -\frac{1}{2}; 2,5\right)$.



◆ Рис. 1.2.1

Але на координатній прямій розташовані точки, які зображають числа, що не є раціональними. Наприклад, із курсу алгебри відомо, що число $\sqrt{2}$ не є раціональним. Це так зване *ірраціональне число*. Якщо побудувати квадрат зі стороною, що дорівнює 1, на координатній прямій x (рис. 1.2.2), то його діагональ дорівнюватиме $\sqrt{2}$. Тоді, провівши дугу кола з центром у точці O і радіусом $OK = \sqrt{2}$, одержимо точку M , координата якої дорівнює $\sqrt{2}$. Крім числа $\sqrt{2}$, ви також зустрічалися з ірраціональними числами $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$ тощо.

❓ Пригадайте, яке «особливе» ірраціональне число вам відоме.



◆ Рис. 1.2.2

Раціональні та ірраціональні числа складають *множину дійсних чисел $\mathbf{R}$* . На координатній прямій кожному дійсному числу відповідає єдина точка і, навпаки, кожній точці координатної прямої відповідає єдине дійсне число (у такому разі кажуть, що між множиною дійсних чисел і множиною точок координатної прямої

встановлюється взаємно однозначна відповідність).

Кожне дійсне число можна записати у вигляді нескінченного десяткового дробу: раціональні числа — у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, ірраціональні — у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

Нагадаємо, що для порівняння дійсних чисел і виконання дій над ними (у випадку, коли хоча б одне з них не є раціональним) використовують наближені значення цих чисел. Зокрема, щоб порівняти два дійсних числа, треба розглядати поспідовно їх наближені значення з недостатчею з точністю до цілих, десятих, сотих і т. д. доти, поки не одержимо якесь наближене значення одного числа, більше за відповідне наближене значення другого. Тоді те число, наближене значення якого більше, і вважається більшим. Наприклад, якщо

$$\alpha = \sqrt{3} = 1,732\,050\,8\dots,$$

$$\beta = 1\frac{3}{4} = 1,750\,000\,0\dots,$$

то $\alpha < \beta$ (оскільки $1,73 < 1,75$).

Для того щоб виконати додавання чи множення розглянутих чисел α і β , поспідовно записують їх наближені значення з недостатчею та з надлишком (з точністю до цілих, десятих, сотих і т. д.) і виконують дії над одержаними раціональними числами. У результаті поспідовно отримують значення суми чи добутку з потрібною точністю.

α	β	$\alpha + \beta$	$\alpha\beta$
$1 < \alpha < 2$	$1 < \beta < 2$	$2 < \alpha + \beta < 4$	$1 < \alpha\beta < 4$
$1,7 < \alpha < 1,8$	$1,7 < \beta < 1,8$	$3,4 < \alpha + \beta < 3,6$	$2,89 < \alpha\beta < 3,24$
$1,73 < \alpha < 1,74$	$1,75 < \beta < 1,76$	$3,48 < \alpha + \beta < 3,50$	$3,0275 < \alpha\beta < 3,0624$
$1,732 < \alpha < 1,733$	$1,750 < \beta < 1,751$	$3,482 < \alpha + \beta < 3,484$	$3,031 < \alpha\beta < 3,034483$
...	...	...	...

Як бачимо, $\alpha + \beta = 3,48\dots$, $\alpha\beta = 3,03\dots$.

У курсі математичного аналізу доводиться той факт, що у випадку, коли наближені значення чисел α і β послідовно беруть із точністю до цілих, десятих, сотих і т. д., то значення суми $\alpha + \beta$ з недовстачею і з надлишком прямує до одного й того самого числа, яке приймають за значення суми $\alpha + \beta$ (аналогічно визначають і добуток $\alpha\beta$).

2 Модуль дійсного числа та його властивості

Нагадаємо означення модуля.

Означення. Модулем додатного числа називається саме це число, модулем від'ємного числа — число, йому протилежне; модуль нуля дорівнює нулю.

Це означення можна коротко записати декількома способами:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{при } a > 0, \\ 0 & \text{при } a = 0, \\ -a & \text{при } a < 0, \end{cases}$$

або $|a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0, \end{cases}$

або $|a| = \begin{cases} a & \text{при } a > 0, \\ -a & \text{при } a \leq 0, \end{cases}$

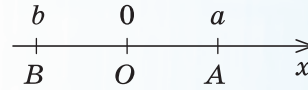
або $|a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a \leq 0. \end{cases}$

За потреби ми будемо користуватися будь-яким із цих записів означення модуля. Для того щоб знайти $|a|$, за означенням необхідно знати знак числа a і використати відповідну формулу. Наприклад,

$$|5| = 5, \quad |-3| = -(-3) = 3, \\ |\sqrt{3} - 2| = -(\sqrt{3} - 2) = 2 - \sqrt{3}.$$

Геометричний зміст модуля
На координатній прямій модуль числа — це відстань від початку координат до точки, що зображує це число.

Дійсно, якщо $a > 0$ (рис. 1.2.3), то відстань $OA = a = |a|$. Якщо $b < 0$, то відстань $OB = -b = |b|$.

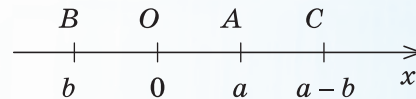


◆ Рис. 1.2.3

Із геометричного змісту модуля випливає така **властивість**.

Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між точками a і b на координатній прямій.

• Для доведення можна скористатися тим, що внаслідок паралельного перенесення вздовж осі координат на b одиниць абсциса відповідної точки змінюється на b : до абсциси заданої точки додається число b , тобто при $b > 0$ точка переноситься вправо, а при $b < 0$ — уліво. Позначимо на координатній прямій числа $a, b, a - b$ відповідно точками A, B, C . На рис. 1.2.4 ці точки зображено для випадку $a > 0$ і $b < 0$, хоча наведене далі обґрунтування не залежить від знаків a і b . Унаслідок паралельного перенесення вздовж осі Ox на b одиниць точка O перейде в точку B , а точка C з координатою $a - b$ — у точку з координатою $a - b + b = a$, тобто в точку A . Тоді $CO = AB$. Але відстань CO — це відстань від точки з координатою $a - b$ до початку координат, тобто $CO = |a - b|$, а отже, і $AB = |a - b|$. ○



◆ Рис. 1.2.4

Використовуючи означення модуля та його геометричний зміст, можна обґрунтувати властивості модуля, наведені в табл. 2.

Наприклад, ураховуючи, що $|a|$ — це відстань від точки a до точки O (рис. 1.2.4), а відстань може виражатися тільки невід'ємним числом, одержуємо:

$$|a| \geq 0,$$

тобто модуль будь-якого числа є невід'ємним числом.

Ураховуючи, що точки a і $-a$ розташовані на однаковій відстані від точки O , одержуємо: $|-a|=|a|$, це означає, що модулі протилежних чисел рівні.

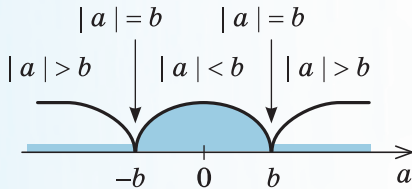
Якщо $a \geq 0$, то $|a|=a$, а якщо $a < 0$, то $a < |a|$. Отже, завжди $a \leq |a|$, тобто величина числа не перевищує величини його модуля.

Якщо в останню нерівність замість a підставити $-a$ і врахувати, що $|-a|=|a|$, то одержимо нерівність $-a \leq |a|$. Звідси $a \geq -|a|$, що разом із нерівністю $a \leq |a|$ свідчить, що для будь-якого дійсного числа a виконується подвійна нерівність

$$-|a| \leq a \leq |a|. \quad (1)$$

Для $b > 0$ нерівність $|a| \leq b$ означає, що число a на координатній прямій розміщене на такій відстані від точки O , яка не перевищує b (рис. 1.2.5), тобто в проміжку $[-b; b]$. Навпаки, якщо число a належить цьому проміжку, тобто $-b \leq a \leq b$, то $|a| \leq b$. Отже,

$$\text{для } b > 0 \quad |a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b. \quad (2)$$



◆ Рис. 1.2.5

Зауважимо, що останнє твердження справедливе і для $b = 0$ (тоді обидві нерівності задовольняє тільки одне значення $a = 0$).

Аналогічно для $b > 0$ нерівність $|a| \geq b$ означає, що число a на координатній прямій розташоване на такій відстані від точки O , яка більша або дорівнює b (рис. 1.2.5), тобто в цьому випадку $a \leq -b$ або $a \geq b$. Навпаки, якщо число a задовольняє одну із цих нерівностей, то $|a| \geq b$. Отже, для $b > 0$ нерівність $|a| \geq b$ рівносильна сукупності нерівностей $a \leq -b$ або $a \geq b$, що можна записати так:

$$\text{для } b > 0 \quad |a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b \text{ або } a \geq b.$$

Властивості модуля добутку і модуля дробу відображають відомі правила дій над числами з однаковими і різними знаками:

• модуль добутку дорівнює добутку модулів множників, тобто $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

• модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю),

$$\text{тобто } \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0).$$

Формулу для знаходження модуля добутку можна узагальнити для випадку декількох множників:

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n|. \quad (3)$$

Якщо у формулі (3) взяти $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, одержуємо формулу $|a^n| = |a|^n$.

Записавши останню формулу справа наліво для $n = 2b$ і врахувавши, що $a^{2k} \geq 0$ при всіх значеннях a , одержуємо $|a|^{2k} = |a^{2k}| = a^{2k}$. Отже, $|a|^{2k} = a^{2k}$.

Для обґрунтування нерівності

$$|a+b| \leq |a| + |b|. \quad (4)$$

запишемо нерівність (1) для чисел a і b : $-|a| \leq a \leq |a|$; $-|b| \leq b \leq |b|$. Додавши почленно ці нерівності, одержуємо $-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$. Ураховуючи нерівність (2), маємо $|a+b| \leq |a| + |b|$, тобто модуль суми не перевищує суми модулів доданків.

Якщо в нерівності (4) замінити b на $-b$ і врахувати, що $|-b| = |b|$, то одержимо нерівність

$$|a-b| \leq |a| + |b|. \quad (5)$$

Якщо записати число a як $a = b + (a-b)$ і використати нерівність (4), то одержимо нерівність $|a| \leq |b| + |a-b|$. Звідси

$$|a| - |b| \leq |a-b|. \quad (6)$$

Якщо в нерівності (6) замінити b на $-b$ і врахувати, що $|-b| = |b|$, то одержимо нерівність

$$|a| - |b| \leq |a+b|, \quad (7)$$

тобто модуль суми двох чисел не менший від різниці їхніх модулів.

Міняючи місцями букви a і b у нерівностях (6) і (7) та враховуючи, що $|a-b|=|b-a|$, одержимо також нерівність

$$|b|-|a| \leq |a \pm b| \quad (8)$$

Нерівності (4)–(8) можна коротко записати так:

$$||a|-|b|| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Доведіть, що сума, різниця, добуток, натуральний степінь і частка (якщо дільник не дорівнює нулю) двох раціональних чисел завжди є раціональним числом.

Розв'язання

► Нехай задано два раціональних числа $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ і $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$, де m_1 і m_2 — цілі, а n_1 і n_2 — натуральні числа. Оскільки сума, різниця, добуток, натуральний степінь і частка двох звичайних дробів завжди є звичайним дробом, то одержаний результат завжди буде раціональним числом. Наприклад,

$$r_1 + r_2 = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{n_1 n_2},$$

де $m_1 n_2 + n_1 m_2$ — ціле число, а $n_1 n_2$ — натуральне. <

Коментар

Будь-яке раціональне число можна записати як дріб $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне числа. Щоб обґрунтувати твердження задачі, достатньо довести, що сума, різниця, добуток і частка двох дробів виду $\frac{m}{n}$ буде дробом такого самого виду.

Приклад 2

Доведіть, що для будь-якого натурального числа n число $\sqrt{n}$ або натуральне, або ірраціональне.

Коментар

Для доведення твердження задачі можна використати метод від супротивного: припустити, що задане додатне число є раціональним ненатуральним (тобто дробом), і отримати суперечність із умовою або з якимось відомим фактом.

Записуючи число $\sqrt{n}$ у вигляді нескоротного дробу, слід урахувати, що при натуральних значеннях n це число завжди буде невід'ємним.

Розв'язання

► Припустимо, що число $\sqrt{n}$ не є ірраціональним (тоді це число раціональне) і не є натуральним числом. Отже, це число може бути тільки раціональним нескоротним дробом $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, де p і q — натуральні числа ($q \neq 1$). За означенням квадратного кореня маємо $n = \frac{p^2}{q^2}$, тобто $n = \frac{p \cdot p}{q \cdot q}$.

Ураховуючи, що $q \neq 1$, одержуємо, що дріб $\frac{p \cdot p}{q \cdot q}$, який дорівнює натуральному числу n , повинен бути скоротним. Отже, у натуральних множників, що стоять у чисельнику і знаменнику цього дробу, повинен бути спільний натуральний дільник, який відрізняється від 1. Але в чисельнику стоять тільки множники p , а в знаменнику — тільки множники q .

Тоді числа p і q мають натуральний дільник, який відрізняється від 1, тобто дріб $\frac{p}{q}$ є скоротним дробом, що суперечить умові. Таким чином, наше припущення неправильне, і для будь-якого натурального числа n число $\sqrt{n}$ або натуральне, або ірраціональне. $\triangleleft$

Наприклад, оскільки числа $\sqrt{3}$ і $\sqrt{10}$ не є натуральними числами ($1 < \sqrt{3} < 2$, $3 < \sqrt{10} < 4$), то $\sqrt{3}$ і $\sqrt{10}$ — ірраціональні числа.



Приклад 3*

Доведіть, що сума $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ — число ірраціональне.

Розв'язання	Коментар
► Припустимо, що число $\sqrt{3} + \sqrt{5} = r$ — раціональне. Тоді $\sqrt{5} = r - \sqrt{3}$. Піднісши обидві частини останньої рівності до квадрата, маємо: $5 = r^2 - 2r\sqrt{3} + 3$. Звідси $2r\sqrt{3} = r^2 - 2$. Отже, $\sqrt{3} = \frac{r^2 - 2}{2r}$. Але права частина цієї рівності — раціональне число (оскільки за припущенням r — раціональне число), а ліва — ірраціональне. Одержана суперечність означає, що наше припущення неправильне і число $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ ірраціональне. $\triangleleft$	Для доведення твердження задачі можна використати метод від супротивного — припустити, що задане число є раціональним, і отримати суперечність із якимось відомим фактом, наприклад із тим, що $\sqrt{3}$ — ірраціональне число. Аналізуючи одержані вирази, використаємо результат прикладу 1: якщо число r раціональне, то числа $r^2 - 2$ і $2r$ та їх частка теж будуть раціональними. Зазначимо, що знаменник отриманого дробу $2r = 2(\sqrt{3} + \sqrt{5}) \neq 0$.

Приклад 4

Розв'яжіть рівняння¹ $|2x + 5| = 7$.

Розв'язання	Коментар
<i>I спосіб</i>	
► $2x + 5 = 7$ або $2x + 5 = -7$; $2x = 2$ або $2x = -12$; $x = 1$ або $x = -6$. Відповідь: 1; -6. $\triangleleft$	Задане рівняння має вигляд $t = 7$ (у даному випадку $t = 2x + 5$). Його зручно розв'язувати, використовуючи геометричний зміст модуля: $2x + 5$ — це відстань від точки 0 до точки $2x + 5$. Але відстань 7 може бути відкладена від 0 як праворуч (одержуємо число 7), так і ліворуч (одержуємо число -7). Отже, рівність $2x + 5 = 7$ можлива тоді і тільки тоді, коли $2x + 5 = 7$ або $2x + 5 = -7$.

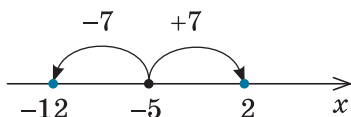
¹ Розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять знак модуля, докладніше розглянуто в § 8.

Розв'язання

Коментар

II спосіб

$$\triangleright |2x - (-5)| = 7;$$



◆ Рис. 1.2.6

$$2x = 2 \text{ або } 2x = -12;$$

$$x = 1 \text{ або } x = -6.$$

Відповідь: 1; -6. ◁

Виходячи з геометричного змісту модуля, $|a - b|$ — відстань між точками a і b на координатній прямій. Запишемо задане рівняння у вигляді $|2x - (-5)| = 7$. Ця рівність означає, що відстань від точки $2x$ до точки -5 дорівнює 7. На відстані 7 від точки -5 розташовані точки 2 і -12 (рис. 1.2.6). Отже, задана рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $2x = 2$ або $2x = -12$, тобто задане рівняння рівносильне сукупності цих рівнянь.

Приклад 5

Розв'яжіть нерівність $|x^2 - 5x| \leq 6$.

Розв'язання

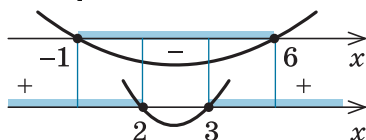
Коментар

$$\triangleright -6 \leq x^2 - 5x \leq 6, \begin{cases} x^2 - 5x \leq 6, \\ x^2 - 5x \geq -6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leq 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} (x+1)(x-6) \leq 0, \\ (x-2)(x-3) \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці нерівності (рис. 1.2.7), отримуємо:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 6, \\ x \leq 2 \text{ або } x \geq 3. \end{cases}$$



◆ Рис. 1.2.7

Отже, $-1 \leq x \leq 2$ або $3 \leq x \leq 6$.Відповідь: $[-1; 2] \cup [3; 6]$. ◁

Задана нерівність має вигляд $|t| \leq 6$ (у даному випадку $t = x^2 - 5x$), і її можна розв'язувати, використовуючи геометричний зміст модуля. Виходячи з геометричного змісту модуля, $|t|$ — це відстань від точки 0 до точки t . На відстані 6 від 0 розташовані числа 6 і -6 .

Тоді нерівність $|t| \leq 6$ задовольняють усі ті й тільки ті точки, які містяться у проміжку $[-6; 6]$, тобто $-6 \leq t \leq 6$. Для розв'язування одержаної подвійної нерівності її зручно замінити відповідною системою нерівностей.

Запитання
для
контролю

- 1.2.1.** Поясніть, які числа входять до множин цілих, раціональних і дійсних чисел. Наведіть приклади. Зобразіть відповідні точки на координатній прямій.
- 1.2.2.** Поясніть, чим відрізняються записи раціонального та ірраціонального чисел у вигляді нескінченного десяткового дробу.
- 1.2.3.** Поясніть, як порівнюють дійсні числа.

1.2.4. Дайте означення модуля дійсного числа.

1) Сформулюйте властивості модуля.

2*) Обґрунтуйте властивості модуля дійсного числа.

Вправи**1.2.1.** Поясніть, чому задане дійсне число не може бути раціональним:

1) $1 + \sqrt{2}$;

4) $\sqrt{7} + 3$;

2) $\sqrt{3} - 5$;

5) $2 - \sqrt{5}$.

3) $\sqrt{10}$;

1.2.2*. Доведіть, що сума, різниця, добуток і частка раціонального та ірраціонального чисел завжди є числом ірраціональним (добуток і частка тільки у випадку, коли задане раціональне число не дорівнює нулю).**1.2.3*.** Доведіть, що задане дійсне число є ірраціональним:

1) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$;

3) $\sqrt{7} - \sqrt{3}$;

2) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$;

4) $\sqrt{7} - \sqrt{2}$.

1.2.4. Користуючись геометричним змістом модуля, зобразіть на координатній прямій множину чисел, які задовольняють нерівність:

1°) $|x| \leq 2$;

3) $|x - 3| \leq 0,5$;

2°) $|x| > 5$;

4) $|x + 1| < 0,3$.

1.2.5. Розв'яжіть рівняння:

1) $|3x + 1| = 4$;

3*) $||x - 1| - 2| = 1$;

2) $|4x - 2| = 6$;

4*) $||2x + 3| - 5| = 3$.

1.2.6. Розв'яжіть нерівність:

1) $|2x - 7| \leq 1$;

3*) $||2x - 1| + 3| \geq 5$;

2) $|3x + 5| > 7$;

4*) $||4x + 7| - 11| < 4$.

**Виявіть свою компетентність****1.2.7.** Які значення слова «модуль» вам відомі? Як, на вашу думку, вони пов'язані з математичним поняттям «модуль»? Знайдіть у мережі Інтернет інформацію з цієї теми, обговоріть її з друзями та подругами.

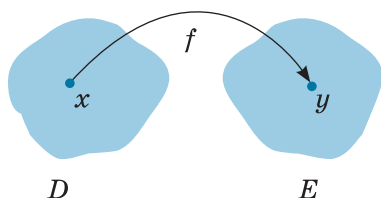
§ 2

ФУНКЦІЇ

2.1. Поняття числової функції. Найпростіші властивості числових функцій

Таблиця 3

1. Поняття числової функції



Числовою функцією з областю визначення D називається залежність, при якій кожному числу x із множини D (області визначення) ставиться у відповідність єдине число y .

Записують цю відповідність так: $y = f(x)$.

Позначення і терміни:

$D(f)$ — область визначення;

$E(f)$ — область значень;

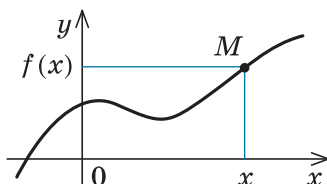
x — аргумент (незалежна змінна);

y — функція (залежна змінна);

f — функція;

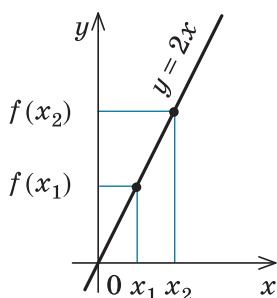
$f(x_0)$ — значення функції f у точці x_0

2. Графік функції



Графіком функції f називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; f(x))$, де перша координата x «пробігає» всю область визначення функції, а друга координата — це відповідне значення функції f у точці x

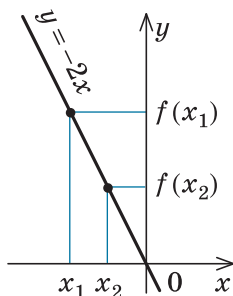
3. Зростаючі й спадні функції



Функція $f(x)$ зростаюча на множині P :

якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$ для всіх $x \in P$

(при збільшенні аргумента відповідні точки графіка «піднімаються»)

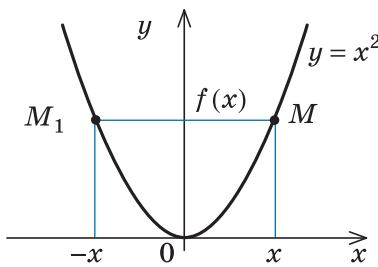


Функція $f(x)$ спадна на множині P :

якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$ для всіх $x \in P$

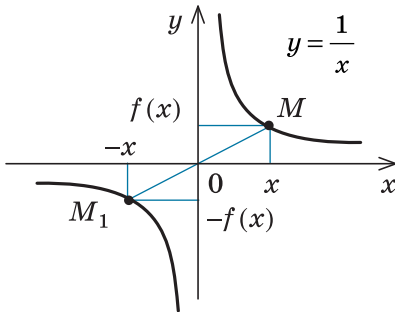
(при збільшенні аргумента відповідні точки графіка «опускаються»)

4. Парні й непарні функції



Функція $f(x)$ **парна**: $f(-x) = f(x)$ для всіх x із області визначення.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy



Функція $f(x)$ **непарна**: $f(-x) = -f(x)$ для всіх x із області визначення.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат — точки O

ПОЯСНЕННЯ Й ОБГРУНТУВАННЯ

1 Поняття функції

З поняттям функції ви ознайомилися в курсі алгебри. Нагадаємо, що *залежність змінної y від змінної x називається функцією, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y .*

Функція — від латин.
function — виконання, здійснення.

У курсі алгебри і початків аналізу ми будемо користуватися таким означенням числової функції.

Означення. Числовою функцією з області визначення D називається залежність, при якій кожному числу x із множини D ставиться у відповідність єдине число y .

Функції позначають латинськими (іноді грецькими) буквами. Розглянемо довільну функцію f . Число y , яке відповідає числу x (на рисунку до п. 1 табл. 3 це показано стрілкою), називають *значенням функції f у точці x* і позначають $f(x)$.

Область визначення функції f — це множина тих значень, яких може набувати аргумент x . Її позначають $D(f)$.

Область значень функції f — це множина, яка складається з усіх чисел $f(x)$, де x належить області визначення. Її позначають $E(f)$.

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. Якщо немає додаткових обмежень, то областю визначення функції, заданої формулою, вважають множину всіх значень змінної, при яких ця формула має зміст.

Наприклад, якщо функція задана формулою $y = \sqrt{x} + 1$, то її область визначення $x \geq 0$, тобто $D(y) = [0; +\infty)$, а область значень $y \geq 1$, тобто $E(y) = [1; +\infty)$.

Іноді функція може задаватися різними формулами на різних множинах значень аргумента. Наприклад,

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Функцію можна задати не тільки за допомогою формули, а й за допомогою таблиці, графіка чи словесного опису.

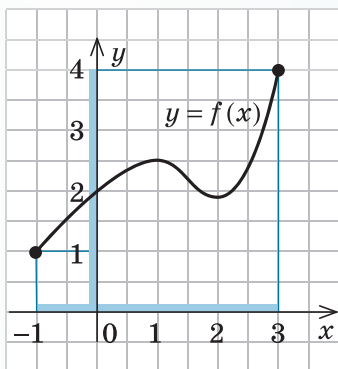


Рис. 2.1.1

Наприклад, на рис. 2.1.1 графічно задано функцію $y = f(x)$ з областю визначення $D(f) = [-1; 3]$ і множиною значень $E(f) = [1; 4]$.

Означення. Найбільшим (найменшим) значенням функції $f(x)$ на множині M , на якій ця функція задана, називається значення функції $f(x)$ в деякій точці x_0 множини M , якщо ні в якій іншій точці множини функція не має більшого (меншого) значення.

Тобто для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$ (відповідно $f(x) \geq f(x_0)$ для найменшого значення).

Іноді це записують так: $\max_M f(x) = f(x_0)$ (відповідно $\min_M f(x) = f(x_0)$).

Наприклад, для функції $y = f(x)$, графічно заданої на проміжку $[-1; 3]$ на рис. 2.1.1, найменше значення дорівнює 1, а найбільше — 4.

Тобто $\max_{[-1; 3]} f(x) = 4$; $\min_{[-1; 3]} f(x) = 1$.

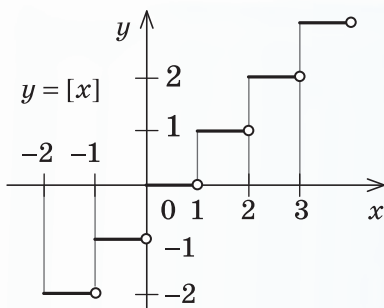


Рис. 2.1.3

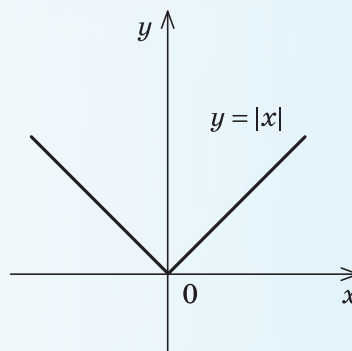


Рис. 2.1.2

2 Графік функції

Нагадаємо означення графіка функції.

Означення. Графіком функції $y = f(x)$ називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; f(x))$, де перша координата x «пробігає» всю область визначення функції, а друга координата — це відповідне значення функції f у точці x .

На рисунках до п. 4 табл. 3 наведено графіки функцій $y = x^2$ та $y = \frac{1}{x}$, а на рис. 2.1.2 — графік функції $y = |x|$.

Наведемо також графік функції $y = [x]$, де $[x]$ — позначення цілої частини числа x , тобто найбільшого цілого числа, яке не перевищує x (рис. 2.1.3). Область визначення цієї функції $D(y) = \mathbf{R}$ — множина всіх дійсних чисел, а область значень $E(y) = \mathbf{Z}$ — множина всіх цілих чисел.

На рис. 2.1.4 наведено графік функції $y = \{x\}$, де $\{x\}$ — позначення дробової частини числа x (за означенням $\{x\} = x - [x]$).

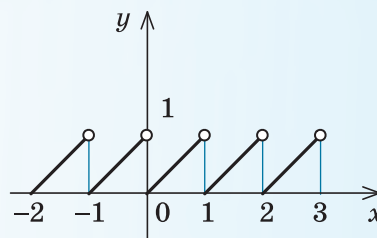
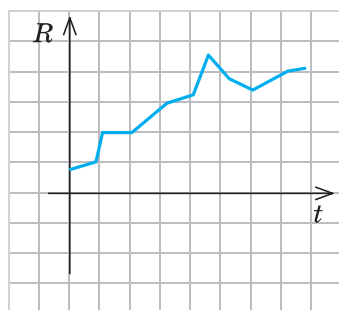
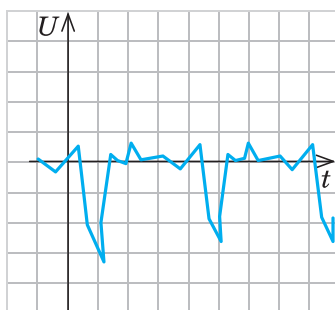


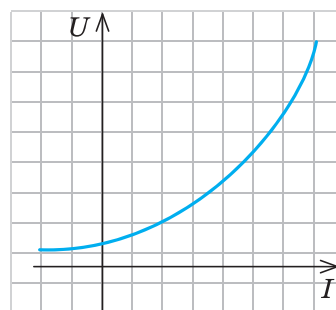
Рис. 2.1.4



А



Б



В



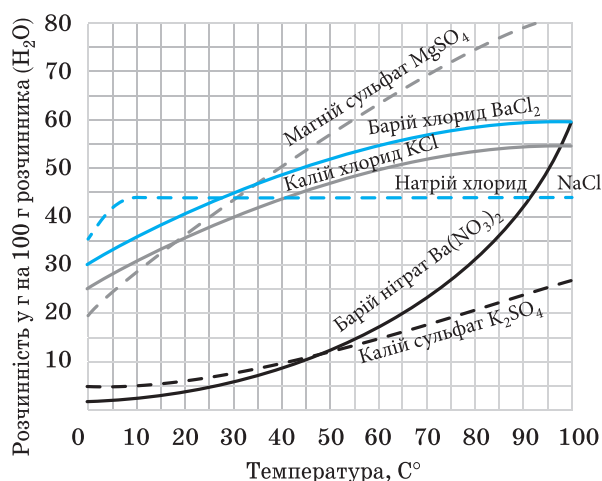
Звертаючись до фізики, хімії, економіки, медицини, можемо знайти зразки графіків функцій. Наприклад:

- графік А, що відображає динаміку курсу долара — залежність вартості R долара у гривнях від часу t ;
- фрагмент кардіограми Б — залежність різниці потенціалів U на поверхні шкіри пацієнта від часу t ;
- вольт-амперна характеристика В діода — залежність напруги від сили струму;
- залежність Γ розчинності твердих речовин від температури.

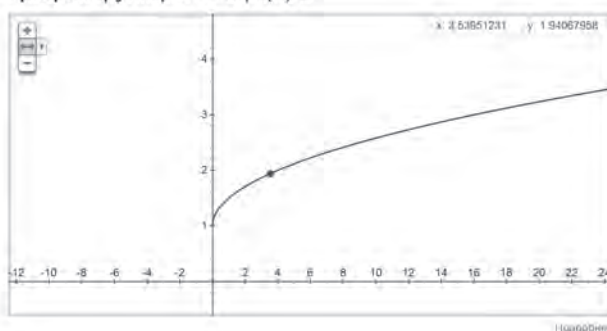


Сьогодні для побудови графіків усе частіше використовують спеціальне програмне забезпечення. Графіки можна будувати за допомогою програм GeoGebra, Graph, Advanced Grapher тощо.

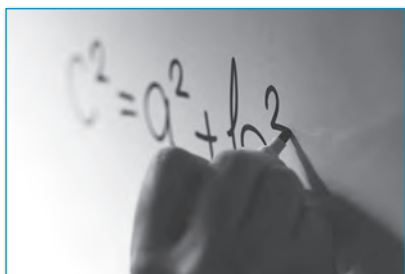
Чи не найпростішим для користувачів є сервіс Google. За його допомогою можна, зокрема, будувати графіки функцій, заданих аналітично. Для цього в рядок пошуку треба ввести формулу, якою задано функцію, наприклад $1 + \sqrt{x}/2$, і натиснути клавішу «Enter». (Нагадаємо, що запис формул відбувається певним чином, про це вам відомо з уроків інформатики.) У результаті отримаємо графік функції $y = 1 + \frac{\sqrt{x}}{2}$ (див. рисунок).



Г

Графік функції $1 + \sqrt{x}/2$ 

Народина



3 Зростаючі та спадні функції

Важливими характеристиками функцій є їх зростання та спадання.

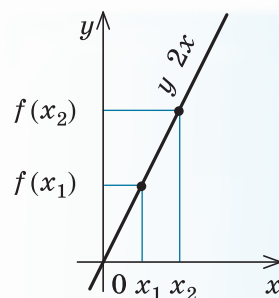
Означення. Функція $f(x)$ називається **зростаючою** на множині P , якщо більшому значенню аргумента із цієї множини відповідає більше значення функції.

Тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 із множини P : якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.

Наприклад, функція $f(x) = 2x$ зростаюча (на всій області визначення, тобто на множині $\mathbf{R}$), оскільки якщо $x_2 > x_1$, то $2x_2 > 2x_1$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$.

Відповідні точки графіка зростаючої функції при збільшенні аргумента «піднімаються» (рис. 2.1.5).

На рис. 2.1.6 наведено графік зростаючої функції $y = x^3$. Дійсно, при $x_2 > x_1$ маємо $x_2^3 > x_1^3$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$.

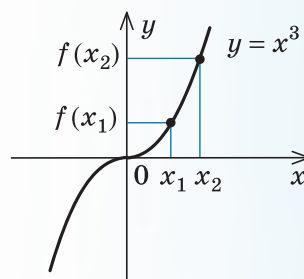


◆ Рис. 2.1.5

Означення. Функція $f(x)$ називається *спадною на множині P* , якщо більшому значенню аргумента із цієї множини відповідає менше значення функції.

Тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 із множини P : якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$.

Наприклад, функція $f(x) = -2x$ спадна (на всій області визначення, тобто на множині $\mathbf{R}$), оскільки якщо $x_2 > x_1$, то $-2x_2 < -2x_1$, тобто $f(x_2) < f(x_1)$. Відповідні точки графіка спадної функції при збільшенні аргумента «опускаються» (рис. 2.1.7).



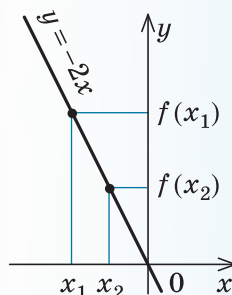
◆ Рис. 2.1.6

Розглядаючи графік функції $y = x^2$ (рис. 2.1.8), бачимо, що на всій області визначення ця функція не є ні зростаючою, ні спадною. Але можна виділити проміжки області визначення, де ця функція зростає і де спадає. Так, на проміжку $[0; +\infty)$ функція $y = x^2$ зростає, а на проміжку $(-\infty; 0]$ — спадає.

Зазначимо, що для зростаючих і спадних функцій виконуються **властивості**, обернені до тверджень, що містяться в означеннях.

Якщо функція зростає, то більшому значенню функції відповідає більше значення аргумента.

Якщо функція спадає, то більшому значенню функції відповідає менше значення аргумента.

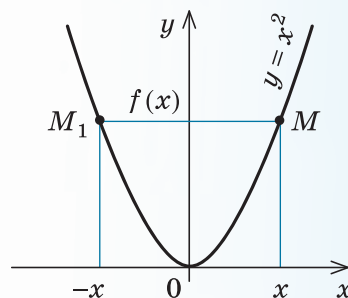


◆ Рис. 2.1.7

● Обґрунтуємо першу із цих властивостей методом від супротивного. Нехай функція $f(x)$ зростає і $f(x_2) > f(x_1)$. Припустимо, що аргумент x_2 не більший за аргумент x_1 , тобто $x_2 \leq x_1$. Із цього припущення одержуємо: якщо $x_2 \leq x_1$ і $f(x)$ зростає, то $f(x_2) \leq f(x_1)$, що суперечить умові $f(x_2) > f(x_1)$. Отже, наше припущення неправильне і, якщо $f(x_2) > f(x_1)$, то $x_2 > x_1$, що і потрібно було довести.

Аналогічно можна обґрунтувати і другу властивість. ○

Наприклад, якщо $x^3 > 8$, тобто $x^3 > 2^3$, то, урахувавши зростання функції $f(x) = x^3$, одержуємо $x > 2$.



◆ Рис. 2.1.8

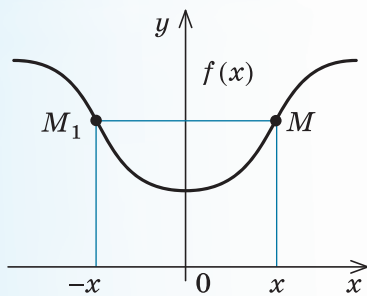


Рис. 2.1.9

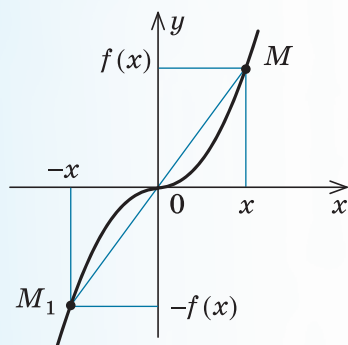


Рис. 2.1.10

4 Парні й непарні функції

Розглянемо функції, області визначення яких симетричні відносно початку координат, тобто разом із кожним числом x містять і число $-x$. Для таких функцій визначено поняття парності й непарності.

Означення. Функція f називається *парною*, якщо для будь-якого x з її області визначення $f(-x) = f(x)$.

Наприклад, функція $y = x^2$ (тобто функція $f(x) = x^2$) — парна, оскільки $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ парна, то до її графіка разом із кожною точкою M із координатами $(x; y) = (x; f(x))$ входить також і точка M_1 із координатами $(-x; y) = (-x; f(-x)) = (-x; f(x))$. Точки M і M_1 розміщені симетрично відносно осі Oy (рис. 2.1.9), тому й **графік парної функції розміщений симетрично відносно осі Oy .**

Наприклад, графік парної функції $y = x^2$ (див. рис. 2.1.8) симетричний відносно осі Oy .

Означення. Функція f називається *непарною*, якщо для будь-якого x з її області визначення $f(-x) = -f(x)$.

Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ (тобто функція $f(x) = \frac{1}{x}$) — непарна, оскільки $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ непарна, то до її графіка разом із кожною точкою M із координатами $(x; y) = (x; f(x))$ входить також і точка M_1 із координатами $(-x; y) = (-x; -f(x))$. Точки M і M_1 розміщені симетрично відносно початку координат (рис. 2.1.10), тому й **графік непарної функції розміщений симетрично відносно початку координат.**

Наприклад, графік непарної функції $y = \frac{1}{x}$ (див. п. 4 табл. 3) симетричний відносно початку координат, тобто відносно точки O .



ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = x^2 + x; \quad 2) y = \frac{x}{x^2 + x}; \quad 3) y = \sqrt{x+5}.$$

Розв'язання	Коментар
1) ► Обмежень для знаходження значень виразу $x^2 + x$ немає, отже, $D(y) = \mathbf{R}$. ◀ 2) ► Область визначення функції $y = \frac{x}{x^2 + x}$ задана обмеженням $x^2 + x \neq 0$, оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю. З'ясуємо, коли $x^2 + x = 0$. Маємо: $x(x+1) = 0$, якщо $x = 0$ або $x = -1$. Тоді область визначення можна задати обмеженнями $x \neq 0$, $x \neq -1$ або записати так: $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$. ◀ 3) ► Область визначення функції $y = \sqrt{x+5}$ задана обмеженням $x+5 \geq 0$, тобто $x \geq -5$, оскільки під знаком квадратного кореня повинен стояти невід'ємний вираз. Отже, $D(y) = [-5; +\infty)$. ◀	Оскільки всі функції задано формулами, то їхні області визначення — це множини всіх значень змінної x, при яких має зміст відповідна формула, тобто вираз, який стоїть у правій частині формули $y = f(x)$. У курсі алгебри зустрічалися тільки два обмеження, які необхідно враховувати під час знаходження області визначення: 1) якщо вираз записано у вигляді дробу $\frac{A}{B}$, то знаменник $B \neq 0$; 2) якщо запис виразу містить квадратний корінь $\sqrt{A}$, то підкореневий вираз $A \geq 0$. У всіх інших випадках, які вам доводилося розглядати, областю визначення виразу були всі дійсні числа¹.

Приклад 2*

Знайдіть область значень функції $y = x^2 - 3$.

Розв'язання	Коментар
► Складаємо рівняння $x^2 - 3 = a$. Воно рівносильне рівнянню $x^2 = a + 3$, яке має розв'язки, якщо $a + 3 \geq 0$, тобто при $a \geq -3$. Усі ці числа і складуть область значень функції. Отже, область значень заданої функції $E(f) = [-3; +\infty)$ (тобто $y \geq -3$). ◀	Позначимо значення заданої функції $f(x)$ (тобто $x^2 - 3$) через a і з'ясуємо, для яких a можна знайти відповідне значення x (тобто таке значення x, при якому значення $f(x) = a$). Тоді всі числа a, для яких існує хоча б один корінь рівняння $f(x) = a$, увійдуть до області значень функції $f(x)$. Множина всіх таких a і складе область значень функції $f(x)$.

Корисно пам'ятати, що область значень функції $y = f(x)$ збігається з множиною тих значень a , при яких рівняння $f(x) = a$ має розв'язки.

¹ Надалі в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу ми розглядатимемо нові вирази з обмеженнями: $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{ctg} a$, $\arcsin a$, $\arccos a$, $\sqrt[n]{a}$, a^α (де α — неціле число).

Приклад 3*

Доведіть, що при $k \neq 0$ областю значень лінійної функції $y = kx + b$ є множина всіх дійсних чисел.

Розв'язання	Коментар
► Якщо $kx + b = a$ (де $k \neq 0$), то розв'язок цього рівняння $x = \frac{a-b}{k}$ існує для будь-якого $a \in \mathbf{R}$ ($k \neq 0$ за умовою). Таким чином, значенням заданої функції може бути будь-яке дійсне число, отже, її область значень $E(f) = \mathbf{R}$. ◀	Позначимо значення заданої функції $f(x)$ (тобто $kx + b$) через a і з'ясуємо, для яких a можна знайти відповідне значення x таке, що $f(x) = a$. Множина всіх таких значень a і буде складати область значень функції $f(x)$.

Приклад 4*

Доведіть, що лінійна функція $y = kx + b$ при $k > 0$ є зростаючою, а при $k < 0$ — спадною.

Розв'язання	Коментар
► Нехай $x_1 > x_2$, тоді $x_2 - x_1 < 0$. Розглянемо різницю $f(x_2) - f(x_1) = kx_2 + b - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1)$. Оскільки $x_2 - x_1 < 0$, то при $k > 0$ маємо $f(x_2) - f(x_1) < 0$, отже, $f(x_2) < f(x_1)$ — функція зростає. При $k < 0$ маємо $f(x_2) - f(x_1) > 0$, отже, $f(x_2) > f(x_1)$ — функція спадає. ◀	Задана функція $f(x) = kx + b$ буде зростаючою, якщо з нерівності $x_2 > x_1$ випливатиме нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, а для доведення останньої нерівності достатньо знайти знак різниці $f(x_2) - f(x_1)$. Аналогічно обґрунтовують і спадання функції.

Обґрунтовуючи зростання або спадання функції, корисно пам'ятати, що для доведення нерівності $f(x_2) > f(x_1)$ чи $f(x_2) < f(x_1)$ достатньо знайти знак різниці $f(x_2) - f(x_1)$.

Приклад 5*

Доведіть, що:

- сума двох зростаючих на множині P функцій завжди є зростаючою функцією на цій множині;
- сума двох спадних на множині P функцій завжди є спадною функцією на цій множині.

Розв'язання	Коментар
1) ► Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ є зростаючими на одній і тій самій множині P. Якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$ і $g(x_2) > g(x_1)$. Додаючи почленно останні нерівності, одержуємо $f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1).$ Це й означає, що сума функцій $f(x)$ і $g(x)$ є зростаючою функцією на множині P. ◀	Для доведення зростання суми двох зростаючих функцій $f(x)$ і $g(x)$ достатньо довести, що на множині P з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1).$

Розв'язання

Коментар

- 2) ► Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ є спадними на множині P . Тоді з нерівності $x_2 > x_1$ маємо:
 $f(x_2) < f(x_1)$ і $g(x_2) < g(x_1)$. Після почленного додавання останніх нерівностей одержуємо:
 $f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1)$, а це й означає, що сума функцій $f(x)$ і $g(x)$ є спадною функцією на множині P . ◀

Аналогічно для доведення того, що сума двох спадних функцій є спадною функцією, достатньо довести: якщо $x_2 > x_1$, то
 $f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1)$.

Приклад 6

Доведіть, що зростаюча або спадна функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.

Розв'язання

Коментар

- Нехай функція $f(x)$ є зростаючою і $f(x_1) = f(x_2)$. (1)
 Припустимо, що $x_1 \neq x_2$.
 Якщо $x_1 \neq x_2$, то або $x_1 > x_2$, або $x_1 < x_2$. Ураховуючи зростання функції $f(x)$, у випадку $x_1 > x_2$ маємо $f(x_1) > f(x_2)$, що суперечить рівності (1). У випадку $x_1 < x_2$ маємо $f(x_1) < f(x_2)$, що також суперечить рівності (1).
 Отже, наше припущення неправильне, і рівність $f(x_1) = f(x_2)$ можлива тільки при $x_1 = x_2$.
 Тобто зростаюча функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.
 Аналогічно доводиться твердження і для спадної функції. ◀

Доведемо це твердження методом від супротивного. Для цього достатньо припустити, що виконується протилежне твердження (функція може набувати одного й того самого значення принаймні у двох точках), і одержати суперечність. Це означатиме, що наше припущення неправильне, а правильним є задане твердження.

Приклад 7

Дослідіть, чи є задана функція парною, непарною або ні парною, ні непарною:

1) $y = \frac{1}{x+1}$;

2) $y = x^4$;

3) $y = x^3 + x$.

Розв'язання

Коментар

- 1) ► Область визначення функції $y = \frac{1}{x+1}$: $x \neq -1$, тобто вона не симетрична відносно точки O (точка $x = -1$ входить до області визначення, а $x = -1$ не входить — див. рис. 2.1.11).



◆ Рис. 2.1.11

Отже, задана функція не може бути ні парною, ні непарною. ◀

- 2) ► Область визначення функції $y = x^4$: $D(y) = \mathbf{R}$, тобто вона симетрична відносно точки O .

$f(-x) = (-x)^4 = f(x)$, отже, функція парна. ◀

- 3) ► Область визначення функції $y = x^3 + x$: $D(y) = \mathbf{R}$, отже, вона симетрична відносно точки O .

$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$, отже, функція непарна. ◀

Для дослідження функції $y = f(x)$ на парність чи непарність достатньо, по-перше, упевнитися, що область визначення цієї функції симетрична відносно точки O (разом із кожною точкою x містить і точку $-x$), і, по-друге, порівняти значення $f(-x)$ і $f(x)$.

Запитання для контролю

1. Сформулюйте означення числової функції. Наведіть приклади таких функцій.
2. На прикладах поясніть, що таке область визначення функції, область значень функції, найбільше та найменше значення функції на множині M . Які обмеження необхідно врахувати, щоб знайти область визначення функції $y = \frac{\sqrt{x}}{x}$? Знайдіть її область визначення.
3. Що називається графіком функції $y = f(x)$? Наведіть приклади.
4. Яка функція називається зростаючою? Наведіть приклади.
5. Яка функція називається спадною? Наведіть приклади.
6. Яка функція називається парною? Наведіть приклади. Як розміщено графік парної функції на координатній площині? Наведіть приклади.
7. Яка функція називається непарною? Наведіть приклади. Як розміщено графік непарної функції на координатній площині? Наведіть приклади.

Вправи

2.1.1°. Знайдіть значення функції в указаних точках:

- 1) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ у точках 2; -1; 3; a ($a \neq 0$);
- 2) $g(x) = x^2 - 3$ у точках 0; 1; -2; b ;
- 3) $\varphi(x) = \sqrt{x+1}$ у точках 0; 3; -1; m ($m > 0$).

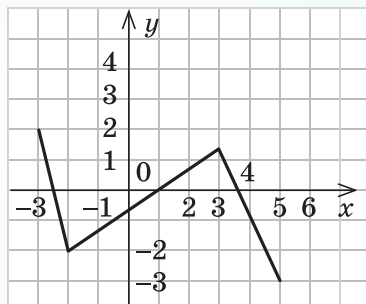
2.1.2. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

- | | |
|----------------------------|---------------------------------------|
| 1°) $y = 2x + 3$; | 7) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$; |
| 2°) $y = \sqrt{x+3}$; | 8) $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x}$; |
| 3°) $y = \frac{1}{x+1}$; | 9*) $y = \sqrt{\frac{x^2-9}{x-3}}$; |
| 4) $y = \frac{x}{x^2+1}$; | 10*) $y = \frac{\sqrt{x^2-x}}{x+1}$; |
| 5) $y = \sqrt{x^2-1}$; | 11*) $y = \frac{\sqrt{x}}{ x -2}$; |
| 6) $y = \sqrt{x^2+1}$; | 12*) $y = \sqrt{x^2+x+1}$. |

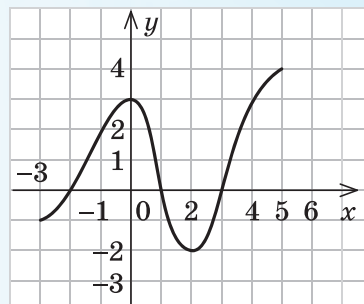
2.1.3. Знайдіть область значень функції, заданої формулою:

- | | |
|------------------------|---------------------|
| 1) $f(x) = 5$; | 5*) $y = -3x + 1$; |
| 2) $f(x) = x$; | 6*) $y = x^2 - 5$; |
| 3) $f(x) = x^2$; | 7*) $y = x + 3$. |
| 4) $f(x) = \sqrt{x}$; | |

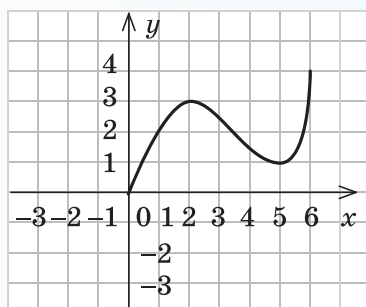
2.1.4°. Для функцій, які задано графіками (рис. 2.1.12), укажіть область визначення, область значень, найбільше та найменше значення на всій області визначення, проміжки зростання і спадання та значення кожної функції при $x = 1$.



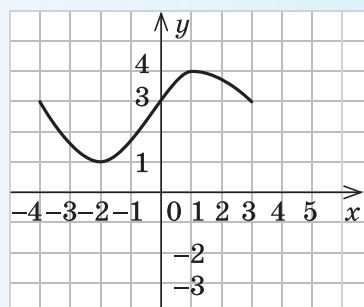
а



в



г



д

◆ Рис. 2.1.12

2.1.5. Обґрунтуйте, що задана функція є зростаючою (на її області визначення):

1) $y = 3x$;

4*) $y = x^5$;

2) $y = x + 5$;

5*) $y = \sqrt{x}$.

3*) $y = x^3$;

2.1.6*. Доведіть, що на заданому проміжку функція зростає:

1) $y = -\frac{2}{x}$, де $x > 0$;

2) $y = -\frac{1}{x}$, де $x < 0$.

2.1.7. Обґрунтуйте, що задана функція є спадною (на її області визначення):

1) $y = -3x$;

3*) $y = -x^3$;

2) $y = -x - 1$;

4*) $y = -x^5$.

2.1.8*. Доведіть, що на заданому проміжку функція спадає:

1) $y = \frac{3}{x}$, де $x < 0$;

2) $y = \frac{5}{x}$, де $x > 0$.

2.1.9*. Доведіть, що функція $y = x^2$ на проміжку $[0; +\infty)$ зростає, а на проміжку $(-\infty; 0]$ спадає.

2.1.10*. Користуючись твердженнями, доведеними у прикладі 5 до п. 2.1, визначте, чи є задана функція зростаючою або спадною.

1) $y = x^3 + x$;

3) $y = x + \sqrt{x}$;

2) $y = -x - x^5$;

4) $y = -x^3 - x^5$.

2.1.11*. Користуючись твердженнями, доведеними у прикладі 6 до п. 2.1:

1) обґрунтуйте, що рівняння $x^3 + x = 10$ має єдиний корінь $x = 2$;

2) підберіть корінь рівняння $\sqrt{x} + x = 6$ і доведіть, що інших коренів це рівняння не має.

2.1.12. Обґрунтуйте, що задана функція є парною:

1) $y = x^6$;

3) $y = \sqrt{x^2 + 1}$;

2) $y = \frac{1}{x^2} + 1$;

4) $y = \sqrt{|x| + x^4}$.

2.1.13. Обґрунтуйте, що задана функція є непарною:

1) $y = x^5$;

3) $y = x|x|$;

2) $y = -\frac{1}{x^3}$;

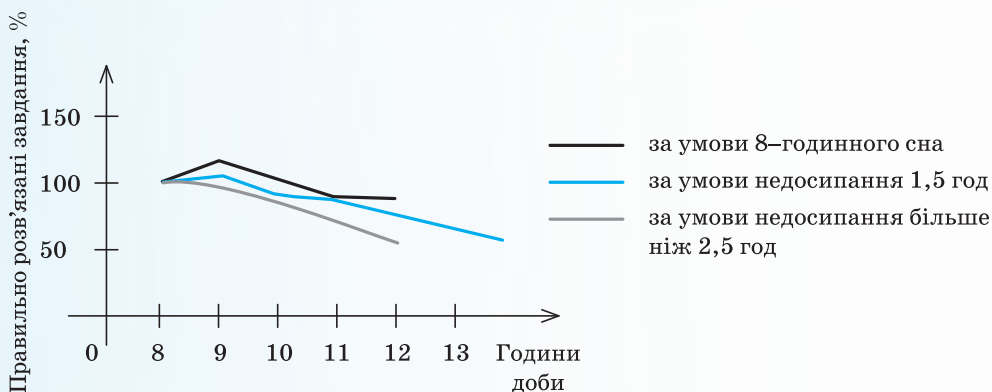
4) $y = x^3 - x$.



Виявіть свою компетентність

2.1.14. Медичними працівниками встановлено, що дитина віком a років ($a < 18$) для нормального розвитку повинна спати протягом t год на добу, де t визначається за формулою $t = 16 - \frac{a}{2}$. Знайдіть $t(16)$, $t(15)$, $t(14)$.

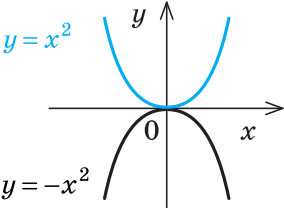
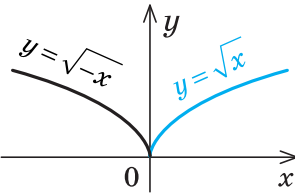
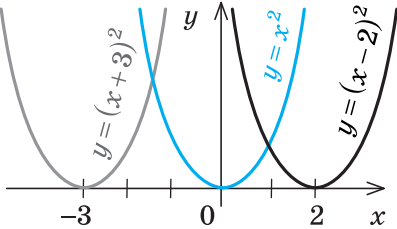
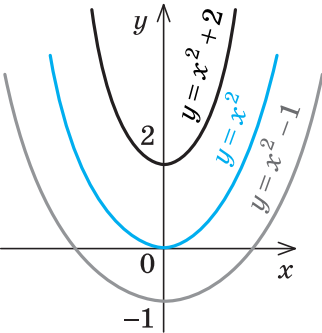
2.1.15. На рис. 2.1.13 зображено графіки зміни розумової працездатності учнів залежно від тривалості сну, наведені в підручнику для медичних вишів. Охарактеризуйте за кожним графіком, як змінюється кількість правильно розв'язаних завдань ($y\%$) з 8 до 12 год однієї доби. Які висновки ви можете зробити?

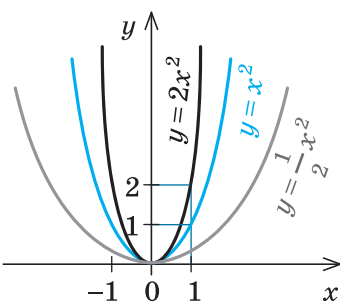
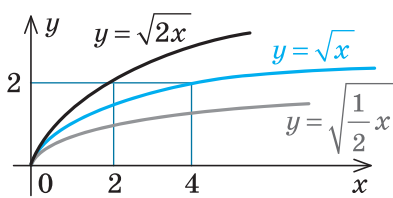
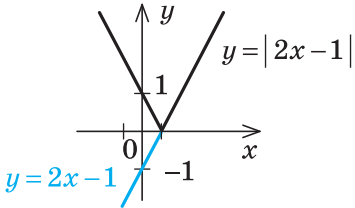
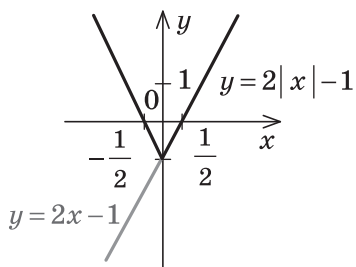


◆ Рис. 2.1.13

2.2. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій

Таблиця 4

Перетворення графіка функції $y = f(x)$			
№	Формула залежності	Приклад	Перетворення
1	$t = -f(x)$		Симетрія відносно осі Ox
2	$y = f(-x)$		Симетрія відносно осі Oy
3	$y = f(x - a)$		Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць
4	$y = f(x) + c$		Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Oy на c одиниць

№	Формула залежності	Приклад	Перетворення
5	$y = kf(x) \quad (k > 0)$		Розтяг або стиск графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Oy (при $k > 1$ розтяг, при $0 < k < 1$ стиск)
6	$y = f(\alpha x) \quad (\alpha > 0)$		Розтяг або стиск графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox (при $\alpha > 1$ стиск, при $0 < \alpha < 1$ розтяг)
7	$y = f(x) $		Вище від осі Ox (і на самій осі) графік функції $y = f(x)$ — без зміни, нижче від осі Ox — симетрія відносно осі Ox
8	$y = f(x)$		Праворуч від осі Oy (і на самій осі) графік функції $y = f(x)$ — без зміни і та сама частина графіка — симетрія відносно осі Oy

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

Розглянемо способи побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій.

1 Побудова графіка функції $y = -f(x)$.

Порівняємо графіки функцій $y = x^2$ та $y = -x^2$ (див. перший рядок табл. 4). Очевидно, що графік функції $y = -x^2$ можна одержати з графіка функції $y = x^2$ симетричним відображенням його відносно осі Ox . Покажемо, що графік функції $y = -f(x)$ завжди можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі Ox .



Дійсно, за означенням графік функції $y = f(x)$ складається з усіх точок M координатної площини, які мають координати $(x; y) = (x; f(x))$. Тоді графік функції $y = -f(x)$ складається з усіх точок K координатної площини, які мають координати $(x; y) = (x; -f(x))$.

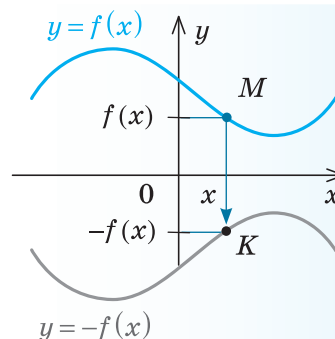
Точки $M(x; f(x))$ і $K(x; -f(x))$ розміщені на координатній площині симетрично відносно осі Ox (рис. 2.2.1). Отже, кожна точка K графіка функції $y = -f(x)$ одержується симетричним відображенням відносно осі Ox деякої точки M графіка функції $y = f(x)$. Тому **графік функції $y = -f(x)$ можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі Ox .**

Ця властивість дозволяє легко обґрунтувати побудову графіка функції $y = |f(x)|$. Маємо:

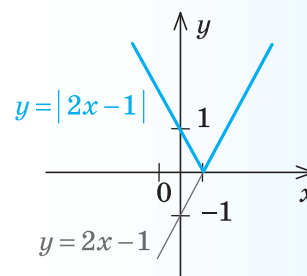
$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{при } f(x) \geq 0 \text{ (графік не змінюється);} \\ -f(x) & \text{при } f(x) < 0 \text{ (симетрія відносно осі } Ox). \end{cases}$$

Отже, **графік функції $y = |f(x)|$ може бути побудований так: частина графіка функції $y = f(x)$, яка лежить вище від осі Ox (і на самій осі), залишається без зміни, а та частина, яка лежить нижче від осі Ox , відображується симетрично відносно цієї осі.**

Наприклад, на рис. 2.2.2 і в табл. 4 (сьомий рядок) зображено графік функції $y = |2x - 1|$, побудований із використанням цього правила.



◆ Рис. 2.2.1



◆ Рис. 2.2.2

2 Побудова графіка функції $y = f(-x)$.

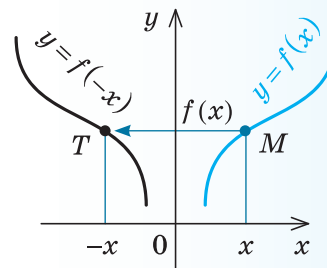
Для побудови графіка функції $y = f(-x)$ урахуємо, що в означенні графіка функції перша координата точок графіка вибирається довільно з області визначення функції. Якщо вибрати як першу координату $(-x)$, то графік функції $y = f(-x)$ складатиметься з усіх точок T координатної площини з координатами $(-x; y) = (-x; f(x))$, а графік функції $y = f(x)$ — з усіх точок $M(x; f(x))$.

Точки $M(x; f(x))$ і $T(-x; f(x))$ розміщено на координатній площині симетрично відносно осі Oy (рис. 2.2.3).

Отже, кожна точка T графіка функції $y = f(-x)$ одержується симетричним відображенням відносно осі Oy деякої точки M графіка функції $y = f(x)$. Тому **графік функції $y = f(-x)$ можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі Oy .**

Ця властивість дозволяє легко обґрунтувати побудову графіка функції $y = f(|x|)$. Маємо:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \geq 0 \text{ (графік не змінюється);} \\ f(-x) & \text{при } x < 0 \text{ (симетрія відносно осі } Oy). \end{cases}$$



◆ Рис. 2.2.3



Інакше кажучи, для того щоб отримати графік $y = f(|x|)$ при $x < 0$ (тобто ліворуч від осі Oy), потрібно відобразити симетрично відносно осі Oy ту частину графіка функції $y = f(x)$, яка лежить праворуч від осі Oy . Таким чином, частину графіка функції $y = f(x)$, яка розташована ліворуч від осі Oy , узагалі не використовують у побудові графіка функції $y = f(|x|)$. Отже, **графік функції $y = f(|x|)$ будують так: частину графіка функції $y = f(x)$, яка лежить праворуч від осі Oy (і на самій осі), залишають без зміни і саме цю частину відображують симетрично відносно осі Oy .**

Наприклад, на рис. 2.2.4 та в табл. 4 (восьмий рядок) зображено графік функції $y = 2|x| - 1$, побудований із використанням цього правила.

3 Побудова графіка функції $y = f(x - a)$

Для того щоб побудувати графік функції $y = f(x - a)$, виберемо як першу координату точки N цього графіка значення $x + a$. Тоді графік функції $y = f(x - a)$ складається з усіх точок N координатної площини з координатами $(x + a; y) = (x + a; f(x + a - a)) = (x + a; f(x))$, а графік функції $y = f(x)$ — з усіх точок $M(x; f(x))$.

Якщо точка M має координати $(x; y)$, а точка N — координати $(x + a; y)$, то перетворення точок $(x; y) \rightarrow (x + a; y)$ — це паралельне перенесення точки M уздовж осі Ox на a одиниць (тобто на вектор $(a; 0)$).

Оскільки кожну точку N графіка функції $y = f(x - a)$ одержують паралель-

ним перенесенням деякої точки M графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць (рис. 2.2.5), то **графік функції $y = f(x - a)$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць.**

Наприклад, у третьому рядку табл. 4 зображено графік функції $y = (x - 2)^2$ (виконано паралельне перенесення графіка $y = x^2$ на +2 одиниці вздовж осі Ox) та графік функції $y = (x + 3)^2$ (виконано паралельне перенесення графіка $y = x^2$ на -3 одиниці вздовж осі Ox).

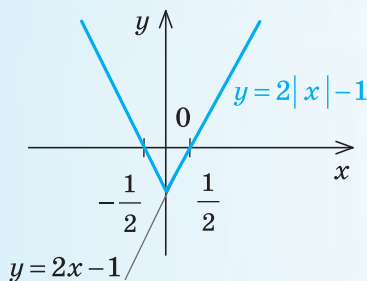
4 Побудова графіка функції $y = f(x) + b$

Графік функції $y = f(x) + b$ складається з усіх точок A координатної площини з координатами $(x; y) = (x; f(x) + b)$, а графік функції $y = f(x)$ — з усіх точок $M(x; f(x))$.

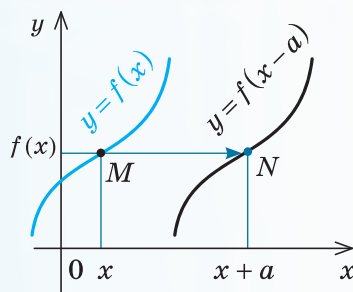
Але якщо точка M має координати $(x; y)$, а точка A — координати $(x; y + b)$, то перетворення точок $(x; y) \rightarrow (x; y + b)$ — це паралельне перенесення точки M уздовж осі Oy на b одиниць (тобто на вектор $(0; b)$).

Оскільки кожна точка A графіка функції $y = f(x) + b$ одержується паралельним перенесенням деякої точки M графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Oy на b одиниць (рис. 2.2.6), то **графік функції $y = f(x) + b$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Oy на b одиниць.**

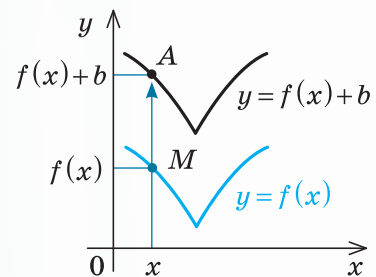
Наприклад, у четвертому рядку табл. 4 зображено графік функції $y = x^2 + 2$ (виконано паралельне перенесення графіка



◆ Рис. 2.2.4



◆ Рис. 2.2.5



◆ Рис. 2.2.6

функції $y = x^2$ на +2 одиниці вздовж осі Oy) та графік функції $y = x^2 - 1$ (виконано паралельне перенесення графіка функції $y = x^2$ на -1 уздовж осі Oy).

5 Побудова графіка функції $y = kf(x)$

Графік функції $y = kf(x)$ ($k > 0$) складається з усіх точок $B(x; kf(x))$, а графік функції $y = f(x)$ — з усіх точок $M(x; f(x))$ (рис. 2.2.7).

Назвемо *перетворенням розтягу вздовж осі Oy із коефіцієнтом k* (де $k > 0$) таке перетворення фігури F , при якому кожна її точка $(x; y)$ переходить у точку $(x; ky)$.

Перетворення розтягу вздовж осі Oy задають формулами: $x' = x$; $y' = ky$. Ці формули виражають координати $(x'; y')$ точки M' , у яку переходить точка $M(x; y)$ при перетворенні розтягу вздовж осі Oy (рис. 2.2.8). При цьому відбувається розтягування відрізка AM у k разів. Зауважимо, що іноді вказане перетворення графіка функції $y = f(x)$ називають *розтягом* тільки при $k > 1$, а при $0 < k < 1$ його називають *стиском уздовж осі Oy* в $\frac{1}{k}$ разів.

Як бачимо, кожна точка B графіка функції $y = kf(x)$ одержується з точки M перетворенням розтягу вздовж осі Oy (див. рис. 2.2.7). При цьому загальна форма графіка не змінюється: він розтягується або стискається вздовж осі Oy . Наприклад, якщо графіком функції $y = f(x)$ була парабола, то після розтягування або стискання графік залишається параболою. Тому **графік функції $y = kf(x)$ ($k > 0$) одержується з графіка функції $y = f(x)$ його розтягуванням (при $k > 1$ розтяг у k разів) або стисканням (при $0 < k < 1$ стиск у $\frac{1}{k}$ разів) уздовж осі Oy .**

6 Побудова графіка функції $y = f(\alpha x)$

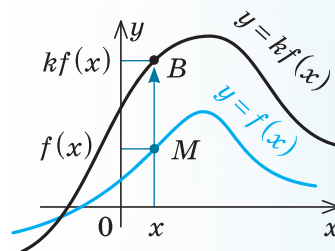
Для побудови графіка функції $y = f(\alpha x)$ ($\alpha > 0$) виберемо як першу координату точки C цього графіка значення $\frac{x}{\alpha}$. Тоді

графік функції $y = f(\alpha x)$ складатиметься з усіх точок C з координатами

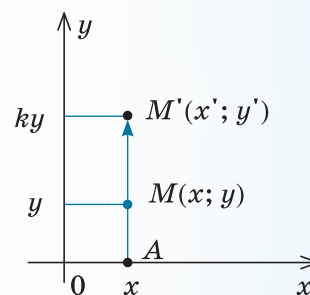
$$\left(\frac{x}{\alpha}; y\right) = \left(\frac{x}{\alpha}; f\left(\alpha \frac{x}{\alpha}\right)\right) = \left(\frac{x}{\alpha}; f(x)\right),$$

а графік функції $y = f(x)$ — з усіх точок $M(x; f(x))$ (рис. 2.2.9).

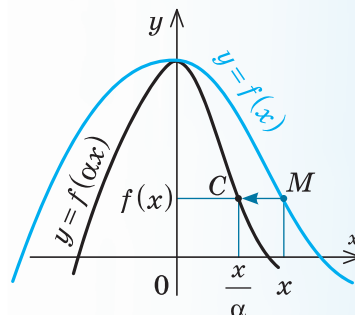
Назвемо *перетворенням розтягу вздовж осі Ox із коефіцієнтом α* (де $\alpha > 0$) таке перетворення фігури F , при якому кожна її точка $(x; y)$ переходить у точку $(\alpha x; y)$.



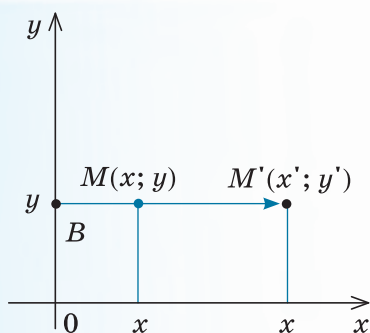
◆ Рис. 2.2.7



◆ Рис. 2.2.8



◆ Рис. 2.2.9



◆ Рис. 2.2.10

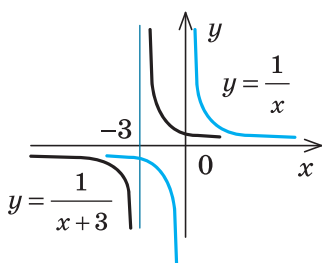
Перетворення розтягу вздовж осі Ox задається формулами: $x' = \alpha x$; $y' = y$. Ці формули виражають координати $(x'; y')$ точки M' , у яку переходить точка $M(x; y)$ при перетворенні розтягу вздовж осі Ox (рис. 2.2.10). При цьому перетворенні відбувається розтягування відрізка BM в α разів. Зауважимо, що іноді вказане перетворення називають розтягом (у $\frac{1}{\alpha}$ разів) тільки при $0 < \alpha < 1$, а при $\alpha > 1$ його називають *стиском уздовж осі Ox* (у α разів). Як бачимо, кожна точка C графіка функції $y = f(\alpha x)$ одержується з точки M графіка функції $y = f(x)$ (див. рис. 2.2.9) перетворенням розтягу вздовж осі Ox (при цьому загальна форма графіка не змінюється). Тому **графік функції $y = f(\alpha x)$ $\alpha > 0$ одержується з графіка функції $y = f(x)$ його розтягуванням (при $0 < \alpha < 1$ розтяг в $\frac{1}{\alpha}$ разів) або стисканням (при $\alpha > 1$ стиск в α разів) уздовж осі Ox .**

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1

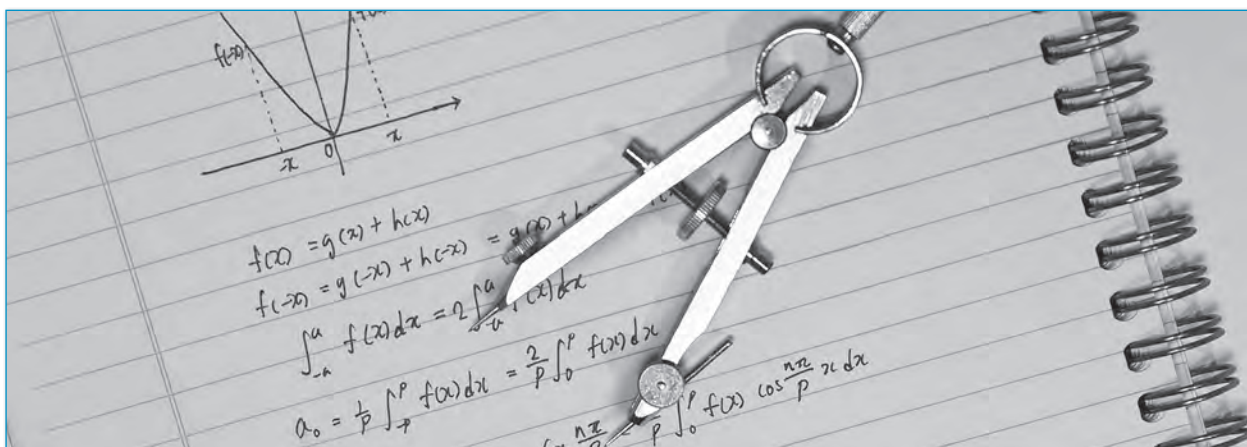
Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{x+3}$.

Розв'язання



Коментар

Ми можемо побудувати графік функції $y = f(x) = \frac{1}{x}$. Тоді графік функції $y = \frac{1}{x+3} = f(x+3) = f(x - (-3))$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox на -3 одиниці (тобто вліво).



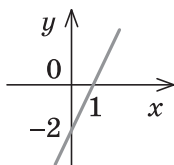
Приклад 2

Побудуйте графік функції $y = -|2x - 2|$.

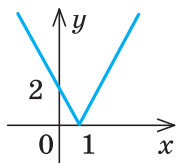
Розв'язання

Послідовно будуюмо графіки:

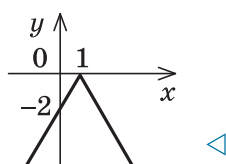
1. $y = 2x - 2$



2. $y = |2x - 2|$



3. $y = -|2x - 2|$



Коментар

Складемо план послідовної побудови графіка заданої функції.

1. Ми можемо побудувати графік функції $y = f(x) = 2x - 2$ (пряма).
2. Потім можна побудувати графік функції $y = \varphi(x) = |2x - 2| = |f(x)|$ (вище від осі Ox графік функції $y = 2x - 2$ залишається без зміни, а частина графіка, розташована нижче від осі Ox , відображається симетрично відносно осі Ox).
3. Після цього можна побудувати графік функції $y = -|2x - 2| = -\varphi(x)$ (симетричний графіку функції $y = \varphi(x)$ відносно осі Ox).

Приклад 3*

Побудуйте графік функції $y = \sqrt{4 - |x|}$.

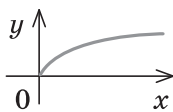
Розв'язання

► Запишемо рівняння заданої функції так:

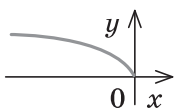
$$y = \sqrt{4 - |x|} = \sqrt{-(|x| - 4)}.$$

Послідовно будуюмо графіки:

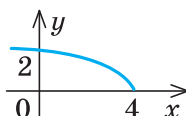
1. $y = \sqrt{x}$



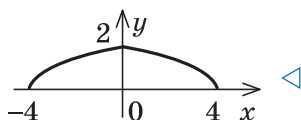
2. $y = \sqrt{-x}$



3. $y = \sqrt{-(x - 4)}$



4. $y = \sqrt{-(|x| - 4)}$



Коментар

Складемо план послідовної побудови графіка заданої функції. (Для того щоб можна було скористатися перетвореннями графіків, наведеними в табл. 4, підкореновий вираз функції запишемо так: $y = \sqrt{-(|x| - 4)}$.)

1. Ми можемо побудувати графік функції $y = f(x) = \sqrt{x}$.
2. Потім можна побудувати графік функції $y = g(x) = \sqrt{-x} = f(-x)$ (симетрія графіка функції $f(x)$ відносно осі Oy).
3. Після цього можна побудувати графік функції $y = \varphi(x) = \sqrt{-(x - 4)} = g(x - 4)$ (паралельне перенесення графіка функції $g(x)$ уздовж осі Ox на 4 одиниці).
4. Потім уже можна побудувати графік заданої функції $y = \sqrt{-(|x| - 4)} = \varphi(|x|) = \sqrt{4 - |x|}$ (праворуч від осі Oy відповідна частина графіка функції $y = \varphi(x)$ залишається без зміни, і та сама частина відображується симетрично відносно осі Oy).

Запитання для контролю

1. На прикладах поясніть, як можна з графіка функції $y = f(x)$ одержати графік функції:

- | | |
|---------------------|--|
| 1) $y = -f(x)$; | 5) $y = kf(x)$, де $k > 0$; |
| 2) $y = f(-x)$; | 6) $y = f(\alpha x)$, де $\alpha > 0$; |
| 3) $y = f(x - a)$; | 7) $y = f(x) $; |
| 4) $y = f(x) + c$; | 8) $y = f(x)$. |

2*. Обґрунтуйте геометричні перетворення, за допомогою яких із графіка функції $y = f(x)$ можна одержати графіки вказаних вище функцій.

Вправи

У завданнях 2.2.1–2.2.7 побудуйте графіки функцій та рівнянь.

2.2.1. 1) $y = |x - 5|$; 3) $y = ||x| - 5|$;

2) $y = |x| - 5$; 4°) $|y| = x - 5$.

2.2.2. 1°) $y = x^2 - 9$; 3) $y = |x^2| - 9$;

2) $y = |x^2 - 9|$; 4°) $|y| = x^2 - 9$.

2.2.3. 1°) $y = (x + 1)^2$; 3) $y = (x + 1)^2 - 3$;

2) $y = (|x| + 1)^2$; 4) $y = |(x + 1)^2 - 3|$.

2.2.4. 1°) $y = \frac{1}{x + 2}$; 3) $y = \frac{1}{|x| + 2}$;

2) $y = \left| \frac{1}{x + 2} \right|$; 4*) $|y| = \frac{1}{x + 2}$.

2.2.5. 1°) $y = -\frac{2}{x}$; 3) $y = -\frac{2}{x - 1}$;

2°) $y = 3 - \frac{2}{x}$; 4) $y = -\frac{2}{|x|}$.

2.2.6. 1°) $y = \sqrt{x - 3}$; 4) $y = |\sqrt{x} - 3|$; 7*) $|y| = \sqrt{x} - 3$.

2°) $y = \sqrt{x} - 3$; 5*) $y = |\sqrt{|x|} - 3|$;

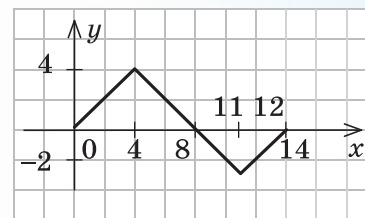
3) $y = \sqrt{|x| - 3}$; 6*) $|y| = \sqrt{x - 3}$;

2.2.7. 1°) $y = -\sqrt{x}$; 3) $y = -\sqrt{|x|}$;

2°) $y = -\sqrt{x} + 4$; 4) $y = -\sqrt{x - 1}$.

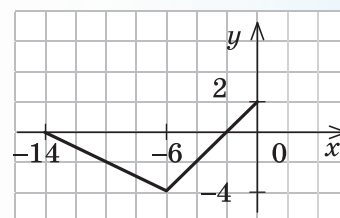
2.2.8. Функція $y = f(x)$ задана на проміжку $[0; 14]$, її графік зображений на рис. 2.2.11. Побудуйте графік функції або рівняння:

- | | |
|-------------------|--|
| 1) $y = -f(x)$; | 6*) $y = f(2x)$; |
| 2) $y = f(-x)$; | 7*) $y = \frac{1}{2}f(x)$; |
| 3) $y = f(x) $; | 8*) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$; |
| 4) $y = f(x)$; | 9*) $ y = f(x)$; |
| 5*) $y = 2f(x)$; | 10*) $ y = f(x)$. |



◆ Рис. 2.2.11

2.2.9. Виконайте завдання вправи 2.2.8 для функції $y = f(x)$, заданої на проміжку $[-14; 0]$, графік якої зображено на рис. 2.2.12.

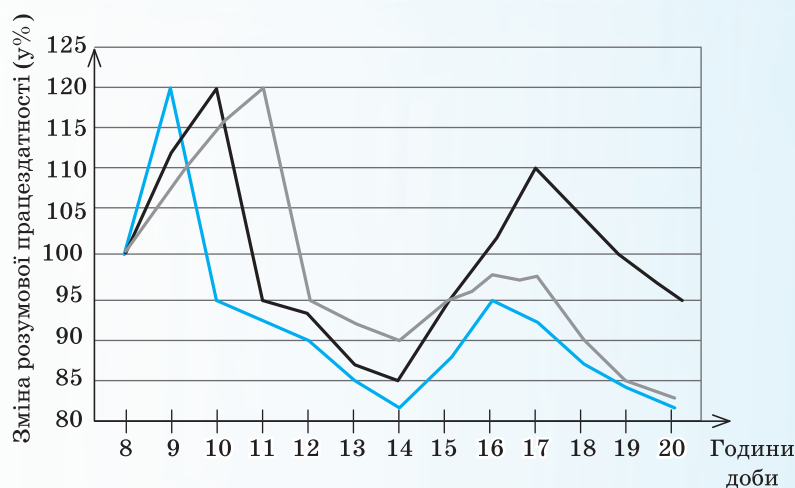


◆ Рис. 2.2.12



Виявіть свою компетентність

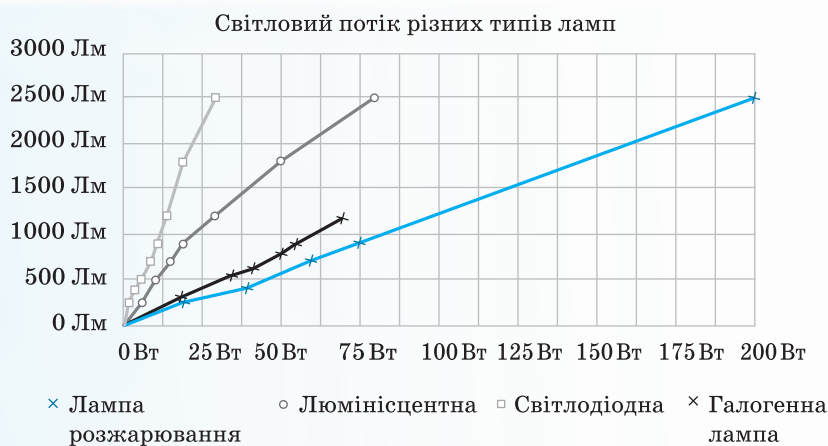
2.2.10. На рис. 2.2.13 зображено графіки зміни розумової працездатності учнів залежно від тривалості активного відпочинку на свіжому повітрі, наведені в підручнику для медичних вишів. Охарактеризуйте за кожним графіком, як змінюється кількість правильно розв'язаних завдань ($y\%$) з 8 до 20 год однієї доби. Які висновки ви можете зробити?



◆ Рис. 2.2.13

- 1 — дні без активного відпочинку;
 2 — дні з активним відпочинком тривалістю 3 год;
 3 — дні з активним відпочинком тривалістю 2 год

2.2.11. На графіках (рис. 2.2.14) проілюстровано залежність світлового потоку різних типів ламп від їх потужності. Оцініть потужність світлодіодної лампи, необхідну для отримання такого самого світлового потоку, як від лампи розжарювання потужністю 100 Вт. Знайдіть у мережі Інтернет вартість лампи розжарювання, вартість відповідної світлодіодної лампи і вартість 1 кВт-год електроенергії та підрахуйте, за який час окупиться заміна лампи розжарювання світлодіодною лампою, якщо вони працюватимуть по 6 год на день. Урахуйте, що лампа розжарювання розрахована на 1000 год роботи, а світлодіодна на 20 000 год.



◆ Рис. 2.2.14



2.3. Обернена функція

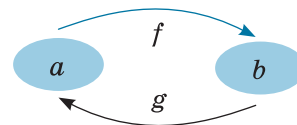
Таблиця 5

1. Поняття оберненої функції

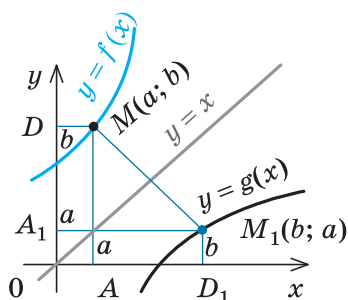
Якщо функція $y = f(x)$ набуває кожного свого значення в єдиній точці її області визначення, то можна задати функцію $y = g(x)$, яка називається *оберненою до функції $y = f(x)$* : для кожного $a \in D(f)$, якщо $f(a) = b$, то $g(b) = a$.

$$E(f) = D(g); D(f) = E(g).$$

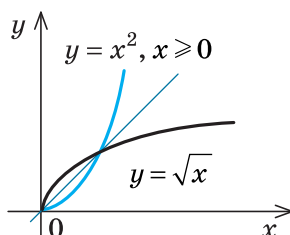
Функції $f(x)$ і $g(x)$ взаємно обернені



2. Властивості оберненої функції



- 1) Графіки прямої та оберненої функцій симетричні відносно прямої $y = x$



- 2) Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона має обернену функцію на цьому проміжку, яка зростає, якщо $f(x)$ зростає, і спадає, якщо $f(x)$ спадає

3. Практичний спосіб знаходження формули функції, оберненої до функції $y = f(x)$

Алгоритм

1. З'ясувати, чи буде функція $y = f(x)$ оборотною на всій області визначення: для цього достатньо з'ясувати, чи має рівняння $y = f(x)$ єдиний корінь відносно змінної x .
Якщо ні, то виділити (якщо можливо) проміжок, де існує обернена функція (наприклад, це може бути проміжок, де функція $y = f(x)$ зростає або спадає).
2. Із рівності $y = f(x)$ виразити x через y .
3. В одержаній формулі ввести традиційні позначення — аргумент позначити через x , а функцію — через y .

Приклад

Знайдіть функцію, обернену до функції $y = 2x + 4$.

► Із рівності $y = 2x + 4$ можна однозначно виразити x через y : $x = \frac{1}{2}y - 2$.

Ця формула задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через y , а функцію — через x .

Позначимо в одержаній формулі аргумент через x , а функцію — через y .

Маємо функцію $y = \frac{1}{2}x - 2$, обернену до функції $y = 2x + 4$. ◀

ПОЯСНЕННЯ Й ОБГРУНТУВАННЯ

1 Поняття оберненої функції

Відомо, що залежність шляху від часу для тіла, яке рухається рівномірно з постійною швидкістю v_0 , виражається формулою $s = v_0 t$. Із цієї формули можна знайти обернену залежність — часу від пройденого шляху: $t = \frac{s}{v_0}$. Функцію

$t(s) = \frac{s}{v_0}$ називають *оберненою до функції* $s(t) = v_0 t$. Зазначимо, що в розглянутому прикладі кожному значенню t ($t \geq 0$) відповідає єдине значення s і, навпаки, кожному значенню s ($s \geq 0$) відповідає єдине значення t .

Розглянемо процедуру одержання оберненої функції в загальному вигляді.

Нехай функція $f(x)$ набуває кожного свого значення в єдиній точці її області визначення (така функція називається *оборотною*). Тоді для кожного числа $y_0 = b$ (з області значень функції $f(x)$) існує єдине значення $x_0 = a$, таке, що $f(a) = b$. Розглянемо нову функцію $g(x)$, яка кожному числу b з області значень функції $f(x)$ ставить у відповідність число a , тобто $g(b) = a$ для кожного b з області значень функції $f(x)$. У цьому випадку функція $g(x)$ називається *оберненою до функції* $f(x)$, а функція $f(x)$ — *оберненою до функції* $g(x)$.

i Із курсу геометрії вам відомо поняття «обернена теорема». Спробуйте провести аналогію між поняттями «обернена функція» і «обернена теорема».

Із процедури одержання оберненої функції випливає, що область значень прямої функції $E(f)$ є областю визначення оберненої функції $D(g)$, а область визначення прямої функції $D(f)$ є областю значень оберненої функції $E(g)$.

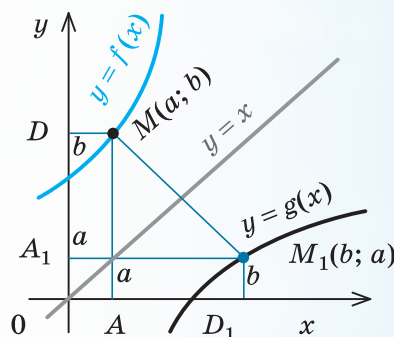
Отже, $E(f) = D(g)$, $D(f) = E(g)$.

2 Властивості оберненої функції

Властивість 1. Графіки прямої і оберненої функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

• Ураховуючи наведену вище процедуру одержання функції, оберненої до функції y , маємо: якщо $f(a) = b$, то за означенням графіка функції точка M із координатами $(a; b)$ належить графіку функції $y = f(x)$.

Аналогічно, оскільки $g(b) = a$, то точка з координатами $(b; a)$ належить графіку функції $y = g(x)$. Точки $M(a; b)$ і $M_1(b; a)$ розміщені на координатній площині симетрично відносно прямої $y = x$ (рис. 2.3.1).



◆ Рис. 2.3.1

Дійсно, пряма $y = x$ є віссю симетрії системи координат. Отже, при симетрії відносно прямої $y = x$ вісь Ox відображається на вісь Oy , а вісь Oy — на вісь Ox . Тоді (наприклад, при $a > 0$ і $b > 0$) прямокутник $OAMD$ зі сторонами $OA = a$ і $OD = b$ на осях координат відображається у прямокутник OA_1M_1D зі сторонами на осях координат, у якого $OA_1 = OA = a$ і $OD_1 = OD = b$. Таким чином, унаслідок симетрії відносно прямої $y = x$ точка $M(a; b)$ відображається в точку $M_1(b; a)$ (а точка M_1 — у точку M). Отже, унаслідок симетрії відносно прямої $y = x$ будь-яка точка $M(a; b)$, що належить графіку функції $y = f(x)$, має

відповідну точку $M_1(b; a)$, яка належить графіку функції $y = g(x)$, а будь-яка точка $M_1(b; a)$, що належить графіку функції $y = g(x)$, має відповідну точку $M(a; b)$, яка належить графіку функції $y = f(x)$. Отримуємо, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. ○

Властивість 2. Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона має обернену функцію на цьому проміжку, яка зростає, якщо $f(x)$ зростає, і спадає, якщо $f(x)$ спадає.

● Дійсно, якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то за властивістю зростаючої (спадної) функції кожного свого значення вона набуває в єдиній точці з цього проміжку (див. приклад 6 до п. 2.1), отже, вона має обернену функцію $g(x)$ на цьому проміжку. Обґрунтувати, що функція $g(x)$ зростає, якщо $f(x)$ зростає, можна методом від супротивного.

Нехай числа a_1 і a_2 входять до області визначення функції $f(x)$ і

$$a_2 > a_1. \quad (1)$$

Позначимо $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$. Якщо функція $f(x)$ зростає, то $f(a_2) > f(a_1)$, тобто $b_2 > b_1$. За означенням оберненої функції $g(x)$ числа b_1 і b_2 входять до її області визначення і

$$g(b_1) = a_1, \quad g(b_2) = a_2. \quad (2)$$

Якщо припустити, що функція $g(x)$ не є зростаючою, то з нерівності $b_2 > b_1$ не

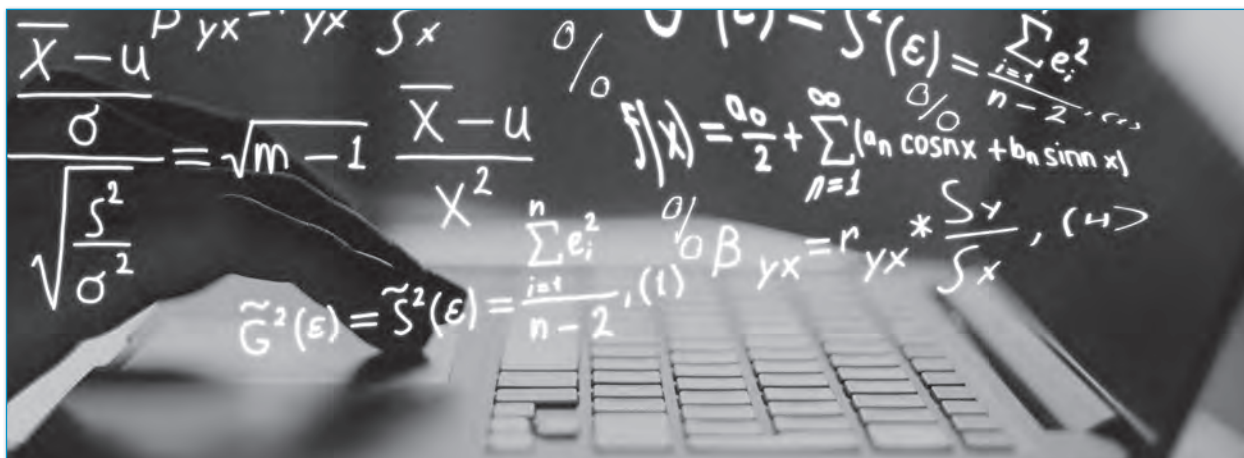
може випливати нерівність $g(b_2) > g(b_1)$ (інакше функція $g(x)$ буде зростаючою), отже, може виконуватися тільки нерівність $g(b_2) \leq g(b_1)$. Але тоді за формулами (2) одержуємо: $a_2 \leq a_1$, що суперечить умові (1). Отже, наше припущення неправильне і функція $g(x)$ зростає, якщо $f(x)$ зростає.

Аналогічно обґрунтовується, що у випадку, коли функція $f(x)$ спадає, обернена до неї функція $g(x)$ теж спадає. ○

3 Практичний спосіб знаходження формули функції, оберненої до функції $y = f(x)$

Із процедури одержання оберненої функції випливає, що для отримання оберненої залежності (яка і буде задавати обернену функцію) необхідно знати, як значення x виражається через значення y . Це можна зробити, розв'язавши рівняння $y = f(x)$ відносно змінної x . Якщо задана функція оборотна, то рівняння матиме єдиний розв'язок для всіх y із області значень функції $f(x)$, і ми одержимо формулу $x = g(y)$, яка задає обернену функцію. Але в цій формулі аргумент позначено через y , а функцію — через x . Якщо поміняти позначення на традиційні, то одержимо запис функції, оберненої до функції $y = f(x)$.

Ці міркування разом із відповідним алгоритмом наведено в табл. 5 і реалізовано в прикладах, наведених нижче.



ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1.

Знайдіть функцію, обернену до функції $y = \frac{1}{x-1}$.

Розв’язання	Коментар
► Область визначення: $x \neq 1$. Тоді з рівності $y = \frac{1}{x-1}$ маємо: $xy - y = 1, \quad xy + y = 1, \quad x = \frac{y+1}{y}.$ Позначаємо аргумент через x, а функцію — через y і одержуємо функцію $y = \frac{x+1}{x}$, обернену до заданої. ◀	На всій області визначення ($x \neq 1$) задана функція оборотна, оскільки з рівняння $y = \frac{1}{x-y}$ можна однозначно виразити x через y ($y \neq 0$ на області значень заданої функції). Одержана формула $x = \frac{y+1}{y}$ задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через y, а функцію — через x. Змінюючи позначення на традиційні, одержуємо кінцевий результат.

Приклад 2.

Знайдіть функцію, обернену до функції $y = x^2$.

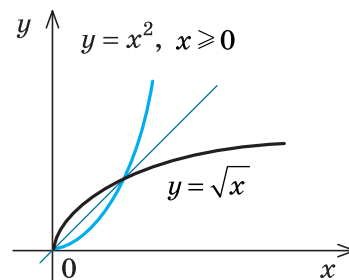
Розв’язання	Коментар
► Із рівності $y = x^2$ при $y \geq 0$ одержуємо $x = \pm\sqrt{y}$. Тоді при $y > 0$ одному значенню y відповідають два значення x. Отже, на всій області визначення $x \in (-\infty; +\infty)$ функція $y = x^2$ не є оборотною і для неї неможливо знайти обернену функцію. ◀	Область значень заданої функції $y \geq 0$. Але при $y > 0$ з рівності $y = x^2$ не можна однозначно виразити x через y. Наприклад, при $y = 4$ одержуємо $x = \pm 2$. Через це ми не можемо значенню $y = 4$ поставити у відповідність єдине число, щоб побудувати обернену функцію.

Приклад 3.

Знайдіть функцію, обернену до функції $y = x^2$ при $x \geq 0$.

Розв’язання	Коментар
► Із рівності $y = x^2$ при $y \geq 0$ одержуємо $x = \pm\sqrt{y}$. Ураховуючи, що за умовою $x \geq 0$, маємо $x = \sqrt{y}$. Позначимо аргумент через x, а функцію — через y і одержимо, що функцією, оберненою до функції $y = x^2$, яка задана тільки при $x \geq 0$, буде функція $y = \sqrt{x}$. ◀	Множина значень заданої функції: $y \geq 0$. При $x \geq 0$ задана функція $y = x^2$ зростає, отже, на проміжку $x \geq 0$ вона має обернену функцію. Тому на цьому проміжку ми зможемо однозначно розв’язати рівняння $x^2 = y$: при $x \geq 0$ маємо $x = \sqrt{y}$. Ця формула задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через y, а функцію — через x. Замінюючи позначення на традиційні, одержуємо кінцевий результат.

Зауваження. У прикладах 2 і 3 ми фактично розглядаємо різні функції (вони мають різні області визначення), хоча в обох випадках ці функції задаються однією й тією самою формулою. Як відомо, графіком функції $y = x^2$ (приклад 2) є парабола, а графіком функції $y = x^2$ при $x \geq 0$ (приклад 3) є тільки права вітка цієї параболи (рис. 2.3.2).



◆ Рис. 2.3.2

Запитання для контролю

1. За якої умови для заданої функції $y = f(x)$ можна побудувати обернену функцію?
2. Поясніть побудову графіка оберненої функції на прикладі функції $y = f(x)$, яка задана таблицею:

x	0	2	4	6
$f(x)$	1	3	5	7

Задайте функцію $y = g(x)$, обернену до функції $y = f(x)$, за допомогою таблиці:

x				
$g(x)$				

3. Як розміщено графіки прямої і оберненої функцій, якщо їх побудовано в одній системі координат? Проілюструйте відповідну властивість графіків на прикладі.
4. Обґрунтуйте взаємне розміщення графіків прямої і оберненої функцій.
5. Чи існує функція, обернена до функції $y = x^2$, де $x \leq 0$? Поясніть це, спираючись на відповідні властивості оберненої функції. Якщо обернена функція існує, то задайте її формулою вигляду $y = g(x)$.

Вправи

- 2.3.1.** Запишіть формулу, яка задає функцію $y = g(x)$, обернену до заданої. Укажіть область визначення і множину значень функції $g(x)$:

1°) $y = 3x - 6$;

3) $y = \frac{2}{x}$;

5) $y = \sqrt{x}$.

2°) $y = -3x - 6$;

4) $y = -\frac{1}{x}$;

2.3.2. На одному рисунку побудуйте графік даної функції і функції, оберненої до даної:

$$\begin{array}{lll} 1^\circ) y = 2x; & 3) y = -\frac{1}{x_1}; & 5^*) y = \sqrt{x+1}. \\ 2^\circ) y = x-2; & 4^*) y = \frac{x_1}{x-1}; & \end{array}$$

2.3.3. Знайдіть функцію, обернену до даної на заданому проміжку, і побудуйте на одному рисунку графік даної функції і функції, оберненої до неї:

$$\begin{array}{ll} 1) y = \frac{1}{4}x^2 \text{ при } x \geq 0; & 3) y = (x-2)^2 \text{ при } x \geq 2; \\ 2) y = \frac{1}{4}x^2 \text{ при } x \leq 0; & 4) y = x^2 - 2 \text{ при } x \leq 0. \end{array}$$



Виявіть свою компетентність

2.3.4. Вартість поїздки в таксі включає оплату подання автомобіля 25 грн та вартість пройденої відстані в розмірі 5 грн за кожний кілометр.

- 1) Складіть функцію, яка визначає вартість поїздки в таксі залежно від пройденої відстані.
- 2) Знайдіть вартість поїздки, якщо пасажир проїхав 30 км.

2.3.5. Складіть функцію, яка визначає залежність витрат на поїздку власним автомобілем від відстані подорожі, якщо ваш автомобіль споживає 7,5 л бензину на шляху 100 км. Скільки грошей вам знадобиться на купівлю бензину для автомобіля, щоб доїхати з Харкова до Києва? Дізнайтеся вартість квитка на потяг і порівняйте витрати на транспорт в обох випадках. За яких умов подорож автомобілем може бути економнішою?



§ 3

РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

Таблиця 6

1. Область допустимих значень (ОДЗ) рівнянь і нерівностей

Областю допустимих значень (або областю визначення) рівняння (або нерівності) називають спільну область визначення для функцій, що стоять у лівій і правій частинах рівняння (або нерівності)

Для рівняння $\sqrt{x+2} = x$ (нерівностей $\sqrt{x+2} < x$ чи $\sqrt{x+2} > x$) ОДЗ: $x+2 \geq 0$, тобто $x \geq -2$, оскільки область визначення функції $f(x) = \sqrt{x+2}$ визначається умовою $x+2 \geq 0$, а областю визначення функції $g(x) = x$ є множина всіх дійсних чисел

2. Рівняння-наслідки

Орієнтир

Якщо кожний корінь першого рівняння є коренем другого, то друге рівняння називають *наслідком* першого.

Якщо з правильності першої рівності випливає правильність кожної наступної, одержуємо рівняння-наслідки.

При цьому можлива поява сторонніх коренів. Тому при використанні рівнянь-наслідків перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою розв'язування

Приклад

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+2} = x$.

Розв'язання

► Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:

$$(\sqrt{x+2})^2 = x^2; \quad x+2 = x^2; \quad x^2 - x - 2 = 0;$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1.$$

Перевірка.

$x = 2$ — корінь;

$x = -1$ — сторонній корінь.

Відповідь: 2. ◀

3. Рівносильні рівняння і нерівності

Означення

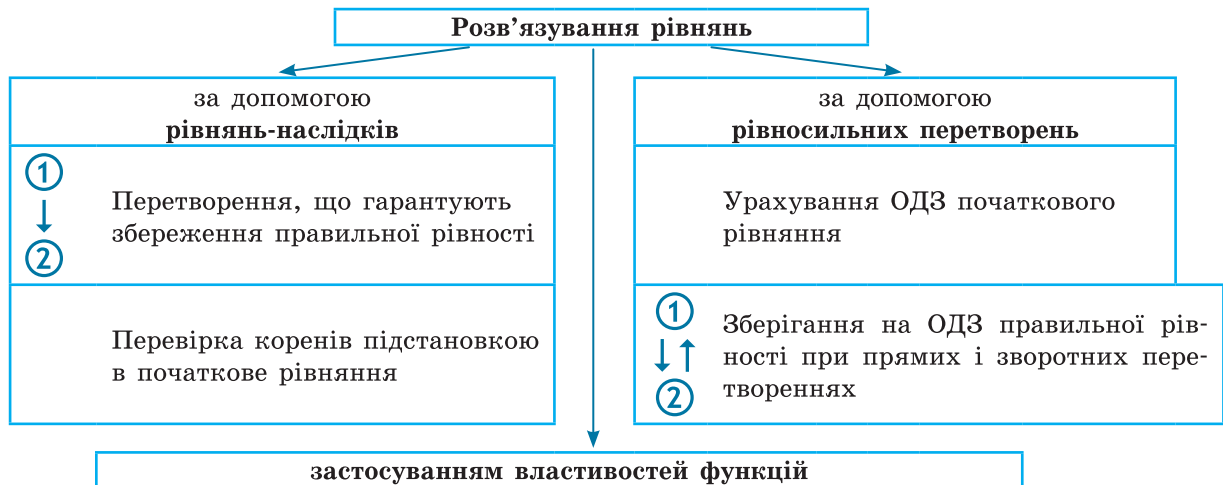
Два рівняння (нерівності) називають *рівносильними* на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі розв'язки.

Тобто кожний розв'язок першого рівняння (нерівності) є розв'язком другого, і навпаки, кожний розв'язок другого є розв'язком першого (схеми такого розв'язування рівнянь і нерівностей наведено в пп. 4 і 6 цієї таблиці)

Найпростіші теореми

1. Якщо з однієї частини рівняння (нерівності) перенести в другу доданки з протилежним знаком, одержимо рівняння (нерівність), рівносильне заданому (на будь-якій множині).
2. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне і те саме число, яке не дорівнює нулю (або на одну й ту саму функцію, що визначена і не дорівнює нулю на ОДЗ заданого рівняння), одержимо рівняння, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого)

4. Схема пошуку плану розв'язування рівнянь



① — початкове рівняння;

② — рівняння, одержане в результаті перетворення початкового;

↓, ↑ — символічне зображення напрямку виконаних перетворень

5. Заміна змінних

Орієнтир

Якщо до рівняння (нерівності або тотожності) змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз зі змінною позначити однією буквою (новою змінною)

Приклад

Розв'яжіть рівняння $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

Розв'язання

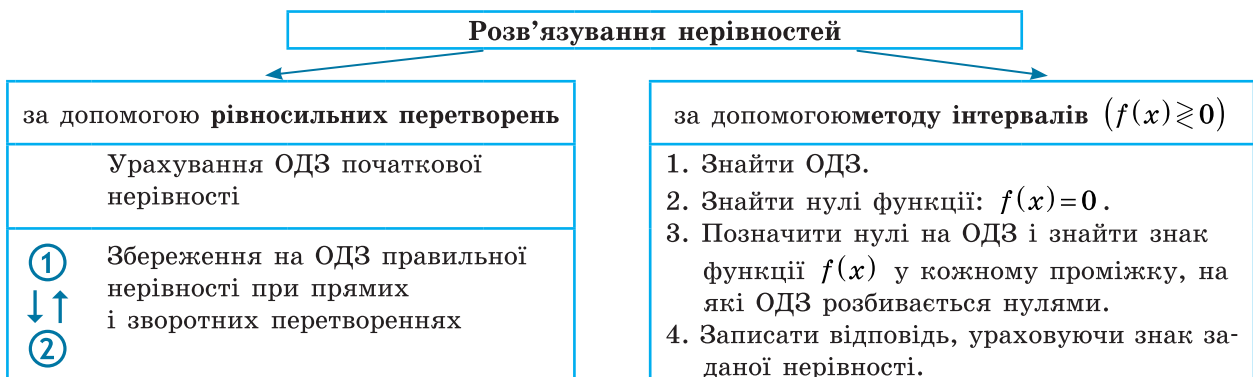
► Заміна: $x^2 = t$ (тоді $x^4 = (x^2)^2 = t^2$).
 $t^2 - 3t - 4 = 0$; $t_1 = -1$, $t_2 = 4$.

1. При $t = -1$ маємо $x^2 = -1$ коренів немає.

2. При $t = 4$ маємо $x^2 = 4$, тоді $x = \pm 2$.

Відповідь: ± 2 . ◀

6. Схема пошуку плану розв'язування нерівностей



① — початкова нерівність;

② — нерівність, одержана в результаті перетворення початкової;

↓, ↑ — символічне зображення виконаних перетворень (із вказівкою щодо напрямку їх виконання)

7. Метод інтервалів (розв'язування нерівностей виду $f(x) \geq 0$)

План

1. Знайти ОДЗ.
2. Знайти нулі функції:
 $f(x) = 0$.
3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному проміжку, на які ОДЗ розбивається нулями.
4. Записати відповідь, урахувавши знак заданої нерівності

Приклад

Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2 - 1}{(x + 3)^2} \geq 0$.

Розв'язання

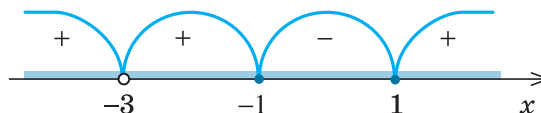
► Нехай $f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 3)^2}$.

1. ОДЗ: $(x + 3)^2 \neq 0$, отже, $x \neq -3$.

2. Нулі функції: $f(x) = 0$.

$$\frac{x^2 - 1}{(x + 3)^2} = 0; \quad x^2 - 1 = 0; \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1 \quad (\text{входять до ОДЗ}).$$

3.



Відповідь: $(-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; +\infty)$. ◁

8. Теорема про рівносильність нерівностей

1. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число (або на одну й ту саму функцію, що визначена і додатна на ОДЗ заданої нерівності), не змінюючи знак нерівності, одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)
2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число (або на одну й ту саму функцію, що визначена і від'ємна на ОДЗ заданої нерівності) і змінити знак нерівності на протилежний, одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої)

ПОЯСНЕННЯ Й ОБҐРУНТУВАННЯ

1 Поняття рівняння і нерівності зі змінною та їх розв'язків

Рівняння в математиці найчастіше розуміють як аналітичний запис задачі про знаходження значень аргумента, при яких значення двох даних функцій рівні. Тому в загальному вигляді рівняння з однією змінною x записують так: $f(x) = g(x)$.

Найчастіше рівняння означають коротше — як рівність зі змінною. Нагадаємо означення кореня рівняння.

Означення. Коренем (або розв'язком) рівняння називається значення змінної, при підстановці якого в рівняння утворюється правильна рівність.

Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або довести, що їх немає.

Наприклад, рівняння $2x = -1$ має єдиний корінь $x = -\frac{1}{2}$, а рівняння $|x| = -1$ не має коренів, оскільки значення $|x|$ не може бути від'ємним числом.

Якщо два вирази зі змінною сполучити одним зі знаків $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, то одержимо нерівність зі змінною.

Аналогічно до рівняння нерівність зі змінною (наприклад, зі знаком $>$) найчастіше розуміють як аналітичний запис задачі про знаходження тих значень аргументів, при яких значення однієї із заданих функцій більше за значення другої заданої функції. Тому в загальному вигляді нерівність з однією змінною x (наприклад, для випадку «більше») записують так: $f(x) > g(x)$. Нагадаємо означення розв'язку нерівності.

Означення. *Розв'язком нерівності називається значення змінної, яке перетворює цю нерівність на правильну числову нерівність.*

Розв'язати нерівність — означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

Наприклад, розв'язками нерівності $3x < 6$ є всі $x < 2$, тобто всі значення x , менші від 2, розв'язками нерівності $x^2 > -1$ є всі дійсні числа ($\mathbf{R}$), а нерівність $x^2 < -1$ не має розв'язків, оскільки значення x^2 не може бути від'ємним числом, меншим від -1 .

2 Область допустимих значень (ОДЗ) рівняння чи нерівності

Якщо задано рівняння $f(x) = g(x)$ або нерівність $f(x) > g(x)$ (чи аналогічну з іншим знаком), то спільну область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$ називають *областю допустимих значень* цього рівняння (нерівності). (Іноді використовують також терміни «область визначення рівняння (нерівності)» або «множина допустимих значень рівняння (нерівності)».) Наприклад, для рівняння $x^2 = x$ (або для нерівності $x^2 < x$) областю допустимих значень є всі дійсні числа. Це можна записати, наприклад, так — ОДЗ: $x \in \mathbf{R}$, оскільки функції $f(x) = x^2$ і $g(x) = x$ мають області визначення $\mathbf{R}$.

Зрозуміло, що кожний корінь заданого рівняння (розв'язок заданої нерівності) входить як до області визначення функції $f(x)$, так і до області визначення функції $g(x)$ (інакше ми не зможемо отримати правильну числову рівність чи нерівність). Отже, кожний корінь рівняння чи розв'язок нерівності обов'язково входить до їх ОДЗ. Це дозволяє в деяких випадках використовувати аналіз ОДЗ рівняння чи нерівності під час їх розв'язування.

Наприклад, у рівнянні $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = x$ (чи у нерівності $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} > x$) функція $g(x) = x$ визначена при всіх дійсних значеннях

x , а функція $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{1-x}$ — тільки за умови, що під знаком квадратного кореня будуть стояти невід'ємні вирази. Отже, ОДЗ цього рівняння задається системою нерівностей $\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ 1-x \geq 0, \end{cases}$ з якої одержуємо систему $\begin{cases} x \geq 2, \\ x \leq 1, \end{cases}$ що не має розв'язків.

Таким чином, ОДЗ заданого рівняння (нерівності) не містить жодного числа, і тому це рівняння (нерівність) не має розв'язків.

Зазначимо, що знаходження ОДЗ заданого рівняння чи нерівності може бути корисним для їх розв'язування, але не завжди є обов'язковим елементом розв'язування.

3 Методи розв'язування рівнянь та нерівностей

Для розв'язування рівнянь використовують *методи точного і наближеного розв'язування*. Зокрема, для точного розв'язування рівнянь у курсі математики 5–6 класів використовували залежності між компонентами та результатами дій і властивості числових рівностей; у курсі алгебри 7–9 класів — рівносильні перетворення рівнянь, а для наближеного розв'язування рівнянь — графічний метод.

Графічний метод розв'язування рівнянь не дає високої точності знаходження коренів рівняння, і за його допомогою найчастіше можна одержати лише грубі наближення коренів. Іноді зручно графічно визначити кількість коренів рівняння або знайти межі, у яких містяться ці корені. У деяких випадках можна графічно довести, що рівняння не має коренів. З указаних причин у шкільному курсі алгебри і початків аналізу під вимогою «розв'язати рівняння» розу-



міється вимога «використовуючи методи точного розв'язування, знайти корені даного рівняння». Наближеними методами розв'язування рівнянь можна користуватися тільки тоді, коли це зазначено в умові завдання (наприклад, якщо ставиться задача розв'язати рівняння графічно).

Переважно під час розв'язування рівнянь різних видів нам доведеться використовувати один із двох методів розв'язування. Перший із них полягає в тому, що задане рівняння замінюють більш простим рівнянням, яке має ті самі корені, — **рівносильним рівнянням**. У свою чергу, одержане рівняння замінюють простішим, рівносильним йому, і т. д., у результаті одержують найпростіше рівняння, яке рівносильне заданому і корені якого легко знайти. Ці корені і тільки вони є коренями даного рівняння.

Другий метод розв'язування рівнянь полягає в тому, що задане рівняння замінюють простішим рівнянням, до коренів якого належать усі корені даного рівняння, тобто замінюють так званим **рівнянням-наслідком**. У свою чергу, одержане рівняння замінюють більш простим рівнянням-наслідком доти, поки не одержать найпростіше рівняння, корені якого легко знайти. Тоді всі корені заданого рівняння містяться серед коренів останнього рівняння. Отже, щоб знайти корені заданого рівняння, достатньо корені останнього рівняння підставити в задане рівняння. За допомогою такої перевірки відділяють корені заданого рівняння (вилучають так звані сторонні корені — ті корені останнього рівняння, які не задовольняють задане).

У наступному параграфі буде також показано застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь певного виду.

Означення. Якщо кожен корінь першого рівняння є коренем другого, то друге рівняння називається **наслідком** першого.

Із означення рівняння-наслідку одержуємо орієнтир: для того щоб одержати рівняння-наслідок, достатньо розглянути задане рівняння як правильну числову

рівність і гарантувати (тобто мати можливість обґрунтувати), що кожне наступне рівняння буде правильною числовою рівністю.

Дійсно, якщо дотримуватися цього орієнтира, то, розглянувши задане рівняння як правильну числову рівність, ми фактично підставимо в перше рівняння замість змінної його корінь. Друге рівняння теж є правильною числовою рівністю, тоді розглянутий корінь першого рівняння є коренем і другого рівняння. Це означає, що друге рівняння є наслідком першого. Оскільки в результаті використання рівнянь-наслідків можлива поява сторонніх коренів, то перевірка підстановкою коренів у початкове рівняння є складовою розв'язування (див. розв'язання рівняння $\sqrt{x+2} = x$ за допомогою рівнянь-наслідків у п. 2 табл. 6).

Зауваження. Перехід від заданого рівняння до рівняння-наслідку можна позначити спеціальним знаком « $\Rightarrow$ » (знаком слідування), але його використання для запису розв'язання не є обов'язковим. Разом із тим, якщо цей знак використано, то це свідчить про те, що ми скористалися рівняннями-наслідками, і тому обов'язково до запису розв'язання необхідно включити перевірку одержаних коренів.

Означення. Два рівняння (нерівності) називаються **рівносильними на деякій множині**, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі розв'язки.

Тобто кожний розв'язок першого рівняння (нерівності) є розв'язком другого і, навпаки, кожен розв'язок другого є розв'язком першого.

Використовуючи означення рівносильних рівнянь (нерівностей), можна отримати орієнтир для рівносильних перетворень рівнянь і нерівностей: для виконання рівносильних перетворень рівнянь або нерівностей достатньо:

- 1) *урахувати ОДЗ заданого рівняння (нерівності);*
- 2) *простежити за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильної рівності (нерівності).*

Дійсно, якщо дотримуватися наведеного орієнтира, то на ОДЗ кожний розв'язок першого рівняння (нерівності) буде розв'язком другого (другої), і навпаки, кожен розв'язок другого рівняння (нерівності) буде розв'язком першого (першої), тобто на ОДЗ розглянуті рівняння (нерівності) будуть рівносильними.

Наприклад, щоб розв'язати за допомогою рівносильних перетворень рівняння

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0, \text{ достатньо врахувати його ОДЗ}$$

($x + 1 \neq 0$) і умову рівності дробу нулю (дріб дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли чисельник дробу дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю). Також слід звернути увагу на те, що на ОДЗ всі потрібні перетворення можна виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильної рівності.

Запис розв'язання в цьому разі може бути таким:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0. \text{ ОДЗ: } x + 1 \neq 0. \text{ Тоді } x^2 - 1 = 0.$$

Отже, $x = 1$ (задовольняє умову ОДЗ) або $x = -1$ (не задовольняє умову ОДЗ).

Відповідь: 1.

Зазначимо, що для успішного розв'язування рівнянь з використанням рівнянь-

наслідків або рівносильних перетворень доцільно також орієнтуватися в тому, у результаті яких перетворень рівнянь можуть з'явитися сторонні корені, а в результаті яких можна втратити корені рівняння. Найбільш типові випадки відповідних перетворень рівнянь та орієнтири, як у кожному з цих випадків одержати правильне (чи повне) розв'язання, наведено в таблиці «Причини появи сторонніх коренів та втрати коренів під час розв'язування рівнянь», з якою можна ознайомитися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.



Розгляньте зміст цієї таблиці самостійно. Зробіть висновки про те, яких перетворень



бажано уникати під час розв'язування рівнянь, і як діяти, коли ці перетворення все ж таки доводиться використовувати. Обговоріть одержані результати з однокласниками та однокласницями.

Розв'яжемо за допомогою рівносильних перетворень нерівність

$$\frac{x - 3}{x + 1} > 0 \quad (1)$$

аналогічно тому, як було розв'язане наведене вище рівняння. Для цього достатньо врахувати ОДЗ нерівності ($x + 1 \neq 0$) та умову додатності дробу (*дріб буде додатним тоді й тільки тоді, коли чисельник і знаменник дробу мають однакові знаки*), а також звернути увагу на те, що на ОДЗ всі потрібні перетворення можна виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильної нерівності.

Розв'язання

► Задана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} x - 3 > 0, \\ x + 1 > 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x - 3 < 0, \\ x + 1 < 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Тоді одержуємо: } \begin{cases} x > 3, \\ x > -1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x < 3, \\ x < -1. \end{cases}$$

Отже, $x > 3$ або $x < -1$.

Відповідь: $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. ◀

Коментар

Зауважимо, що, записуючи умову додатності дробу — сукупність систем нерівностей (2), ми неявно врахували ОДЗ нерівності (1). Дійсно, якщо $x + 1 > 0$ або $x + 1 < 0$, то $x + 1 \neq 0$, тому в явному вигляді ОДЗ заданої нерівності не записана в оформленні розв'язання.