

**М. І. Бурда, Т. В. Колесник,
Ю. І. Мальований, Н. А. Тарасенкова**

Математика

(алгебра і початки аналізу та геометрія)

**Підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти**

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

УДК 512(075.3)
Б 91

Бурда М. І.
Б 91 Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія):
підруч. для 10 класу закладів загальної середньої
освіти / М. І. Бурда, Т. В. Колесник, Ю. І. Мальований,
Н. А. Тарасенкова. — К. : УОВЦ «Оріон», 2018. — 272 с.
ISBN 000-000-0000-00-0.

УДК 512(075.3)

ISBN 000-000-0000-00-0

© М. І. Бурда, Т. В. Колесник,
Ю. І. Мальований, Н. А. Тарасенкова, 2018
© УОВЦ «Оріон», 2018

СЛОВО ДО УЧНІВ

Дорогі друзі! Ви приступаєте до вивчення курсу математики, який складається з двох частин — алгебри і початків аналізу та стереометрії — розділу геометрії.

У першій частині курсу математики ви систематизуєте й поглибите знання про степінь числа, властивості вже відомих функцій, ознайомитеся з новими функціями — степеневими і тригонометричними. Виробите вміння будувати графіки функціональних залежностей, застосовувати вивчені поняття і властивості до розв’язування задач та дослідження найпростіших математичних моделей. Ознайомитеся з елементами могутнього апарату математики — диференціального числення та його практичними застосуваннями.

Друга частина курсу математики присвячена стереометрії — розділу геометрії про властивості фігур у просторі. Ви дізнаєтеся про аксіоми стереометрії та наслідки з них, про паралельність і перпендикулярність прямих і площин, координати й вектори у просторі. Виробите вміння застосовувати вивчені поняття, властивості й ознаки під час розв’язування задач та на практиці. Ви переконаєтеся, що знання й уміння зі стереометрії потрібні багатьом фахівцям — архітекторам, будівельникам, конструкторам, токарям, фрезерувальникам та ін.

Як успішно вивчати математику за цим підручником? Весь матеріал поділено на розділи, а розділи — на параграфи. Кожний параграф містить теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним** шрифтом. Це найважливіші означення та властивості. Їх потрібно зрозуміти, запам’ятати і вміти застосовувати під час розв’язування задач. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви понять). У тексті параграфів ви знайдете також зразки розв’язань деяких задач і вправ.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Пригадайте головне» після кожного параграфа. Наприкінці кожного розділу вміщено контрольні запитання й тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечком (°) позначають задачі та вправи середнього рівня складності. Усім треба вміти їх розв’язувати, щоб мати змогу вивчати математику далі. Номери задач і вправ достатнього рівня складності не мають позначки біля номера. Навчившись розв’язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочкою (*) позначено задачі високого рівня складності. Якщо не зможете одразу їх розв’язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння та наполегливість. Радість від того, що ви розв’язали складну задачу, буде вам нагородою.

Відшукати шляхи до розв'язування деяких з таких задач допоможуть вказівки, вміщені у відповідях. Розв'язавши задачі, що виділено жирним шрифтом, запам'ятайте їх формулювання. Ці математичні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач.

Важливим результатом освіти взагалі, і навчання математики зокрема, є набуття тими, хто навчається, відповідних компетентностей — здатностей на основі здобутих знань і вмінь успішно діяти в навчальних і життєвих ситуаціях, розв'язувати різноманітні проблеми, що постають перед людиною в різних видах діяльності. Вміщені в підручнику задачі та вправи спрямовані на реалізацію цієї мети. Найбільш характерні з таких задач виокремлено в рубрику «Проявіть компетентність».

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше», ви зможете поглибити та розширити свої знання.

У кінці підручника ви знайдете необхідний додатковий матеріал і вправи для повторення вивченого в 10 класі.

У підручнику застосовуються спеціальні позначки (пiktограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.

УМОВНІ ПОЗНАЧКИ



— запам'ятайте



— поміркуйте



— зверніть увагу



— типова задача



— як записати в зошиті



— домашнє завдання

Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового
і задоволення від навчання!

ЗМІСТ

Слово до учнів

Частина I. Алгебра і початки аналізу.

Розділ 1. Функції, їхні властивості та графіки.

§ 1. Числові функції та їх властивості

§ 2. Побудова графіків функцій
за допомогою геометричних перетворень

§ 3. Корінь n -го степеня. Арифметичний корінь
 n -го степеня та його властивості

§ 4. Степінь з раціональним показником.

§ 5. Степенева функція та її властивості

Перевірте, як засвоїли матеріал

Контрольні запитання

Тестові завдання до розділу 1

Розділ 2. Тригонометричні функції.

§ 6. Тригонометричні функції довільного кута

§ 7. Область визначення, множина значень і знаки
тригонометричних функцій кута

§ 8. Радіанна міра кута

§ 9. Тригонометричні функції числового аргументу.

§ 10. Формули зведення

§ 11. Основні співвідношення між тригонометричними
функціями одного й того самого аргументу

§ 12. Формули додавання для косинуса.

§ 13. Формули додавання для синуса.

§ 14. Формули додавання для тангенса і котангенса

§ 15. Тригонометричні функції подвійного аргументу

§ 16. Основні властивості тригонометричних функцій.

§ 17. Графіки функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$

§ 18. Графік функцій $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$,

§ 19. Рівняння $\sin x = a$

§ 20. Рівняння $\cos x = a$

§ 21. Рівняння $\operatorname{tg} x = a$ та $\operatorname{ctg} x = a$

Перевірте, як засвоїли матеріал

Контрольні запитання

Тестові завдання до розділу 2

Розділ 3. Похідна та її застосування

§ 22. Задачі, що приводять до поняття похідної

§ 23. Похідна функції, її механічний і геометричний зміст

§ 24. Основні правила диференціювання функцій

§ 25. Ознаки сталості, зростання й спадання функцій

§ 26. Екстремуми функцій

§ 27. Застосування похідної до розв'язування прикладних задач

Перевірте, як засвоїли матеріал

Контрольні запитання

Тестові завдання до розділу 3

Частина II. Геометрія**Розділ 4. Паралельність прямих та площин**

- § 28. Що вивчають у стереометрії
- § 29. Аксиоми стереометрії
- § 30. Взаємне розміщення двох прямих у просторі
- § 31. Взаємне розміщення прямої та площини
- § 32. Взаємне розміщення двох площин
- § 33. Властивості паралельних площин
- § 34. Паралельне проектування

Перевірте, як засвоїли матеріал

Контрольні запитання

Тестові завдання до розділу 4

Розділ 5. Перпендикулярність прямих і площин

- § 35. Перпендикулярність прямої та площини
- § 36. Перпендикуляр і похила до площини
- § 37. Теорема про три перпендикуляри
- § 38. Залежність між паралельністю і перпендикулярністю прямих та площин
- § 39. Перпендикулярні площини

Перевірте, як засвоїли матеріал

Контрольні запитання

Тестові завдання до розділу 5

Розділ 6. Координати та вектори

- § 40. Прямокутні координати в просторі
- § 41. Вектори у просторі
- § 42. Симетрія у просторі

Перевірте, як засвоїли матеріал

Контрольні запитання

Тестові завдання до розділу 6

Повторення вивченого

Алгебра і початки аналізу

Геометрія

Відповіді та вказівки

Предметний покажчик

Частина I**АЛГЕБРА
І ПОЧАТКИ
АНАЛІЗУ**

Розділ 1

Функції, їхні властивості та графіки



Числові функції та їх властивості

З поняттям функції, окремими видами функцій і їх властивостями ви вже знайомі з попередніх років навчання. Тут ми відновимо деякі важливі відомості, поглибимо знання про функцію.

1. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ

Різноманітні процеси, що відбуваються в довкіллі, слугують прикладами явищ, у яких зміна одних величин спричиняє зміну інших. Для вивчення того чи іншого явища потрібно встановити взаємозв'язок між величинами, які його описують, і дослідити його властивості. Такий взаємозв'язок у математиці задається за допомогою функцій.

Наведемо приклади.

1. Площа S (см²) круга радіуса r (см) залежить від довжини радіуса й визначається за формулою $S = \pi r^2$.

За цією формулою для кожного значення $r > 0$ можна знайти відповідне значення S .

Наприклад, якщо $r = 2$, то $S = 4\pi \approx 12,56$; якщо $r = 3,2$, то $S = 10,24\pi \approx 32,1$; якщо $r = 5,1$, то $S = 26,01\pi \approx 81,67$.

2. Потяг Київ — Харків на певному проміжку шляху рухається зі сталою швидкістю 80 км/год.

Шлях, пройдений потягом, залежить від часу руху.

Позначимо час руху потяга в годинах через τ , а пройдений шлях у кілометрах — через s . Залежність змінної s від змінної τ в цьому випадку наведено в таблиці 1.

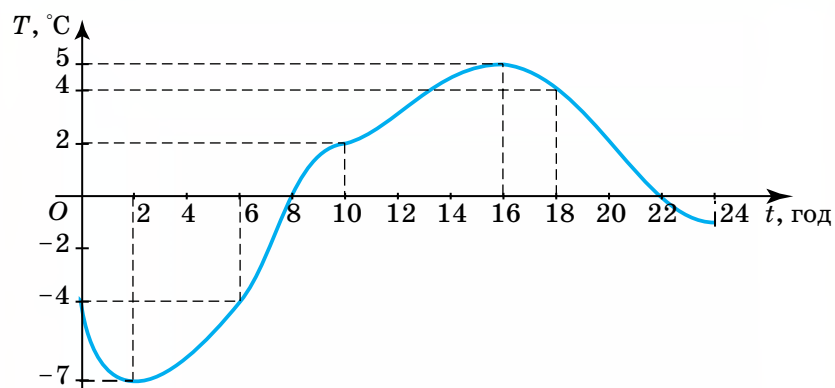
Таблиця 1

τ (год)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
S (км)	80	120	160	200	240	280	320

У розділі ви:

- ✦ **повторите**, систематизуєте та узагальните відомості про числові функції; їх основні властивості;
- ✦ **розширите знання і вдосконалисте вміння** щодо побудови графіків функцій на основі відповідних перетворень;
- ✦ **дізнаєтесь**, як розуміти степінь числа або виразу з дробовим показником;
- ✦ **ознайомитесь** із новим класом функцій — степеневими функціями.

3. На малюнку 1 зображено графік зміни температури повітря протягом доби.



Мал. 1

За допомогою цього графіка для кожного моменту часу t (у годинах) від 0 до 24 год можна знайти відповідне значення температури T (у градусах Цельсія).

Наприклад, якщо $t = 6$, то $T = -4$; якщо $t = 10$, то $T = 2$; якщо $t = 18$, то $T = 4$.

В усіх наведених прикладах йдеться про залежність двох змінних, причому одна з них (r, τ, t) змінюється незалежно, а друга (S, s, T) — набуває значень залежно від значень першої змінної. Величину, яка змінюється незалежно, так і називають — *незалежною змінною*, або *аргументом*, а другу — *залежною змінною*. Звернемо увагу на те, що в усіх прикладах кожному значенню незалежної змінної відповідає одне і тільки одне значення залежної змінної. Такі змінні називають функціонально залежними. У розглянутих прикладах незалежні й залежні змінні виражаються дійсними числами.



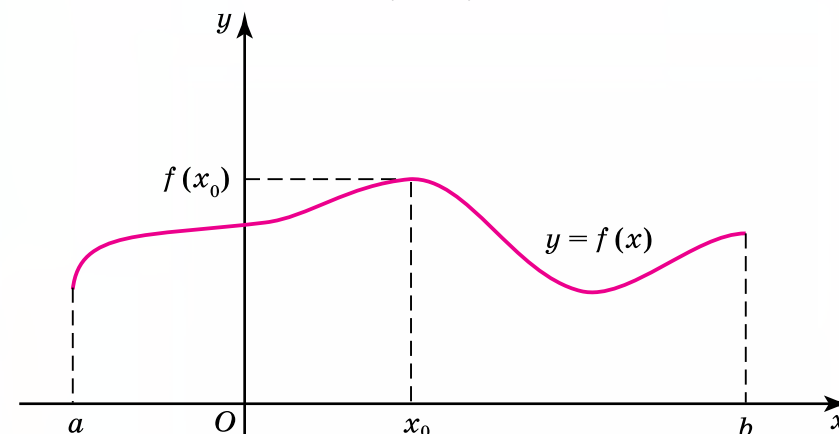
Нехай D — деяка множина дійсних чисел. Числовою функцією з областю визначення D називають таку залежність, за якої кожному числу x із множини D за певним законом відповідає одне дійсне число y , і записують $y = f(x)$.

Змінну x називають незалежною змінною, або *аргументом*, а y — залежною змінною, або *функцією*. Число $f(x_0)$ називають значенням функції f в точці $x_0 \in D$. Множину всіх значень незалежної змінної x називають *областю визначення функції* f і позначають $D(f)$. Множину значень функції, яких вона набуває за всіх значень x із її області визначення, називають *областю значень функції*, і позначають $E(f)$. Окрім букв x, y, f можна вживати й інші букви.



Графіком функції f називають множину точок $(x; y)$ координатної площини xOy , де $y = f(x)$, $x \in D(f)$.

Зазначимо, що не будь-яка крива в прямокутній системі координат xOy задає функцію. За означенням функцію може задавати тільки така крива, яку кожна пряма $x = x_0$, $x_0 \in D(f)$, паралельна осі Oy , перетинає лише в одній точці з ординатою $y_0 = f(x_0)$ (мал. 2).



Мал. 2

Крива, зображена на малюнку 3, функцію не задає, бо в цьому випадку значенню x_0 відповідає не одне, як того вимагає означення функції, а три значення змінної y .

Розглянемо властивості функцій. Проаналізуємо наведені вище приклади.

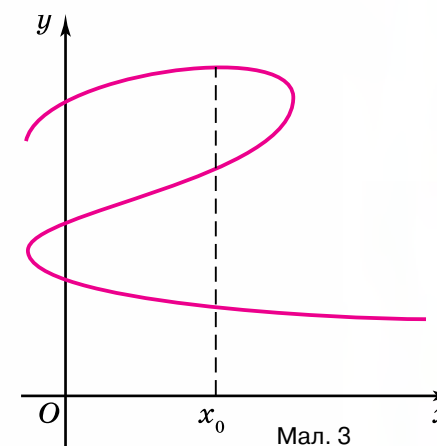
Областю визначення функції, розглянутої в прикладі 1, є $r > 0$, або $r \in (0; +\infty)$, а областю значень цієї функції є $S > 0$, або $S \in (0; +\infty)$, тобто й областю визначення, і множиною значень функції є область всіх додатних чисел.

У прикладі 2 областю визначення функції є множина $D(s) = \{1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4\}$, а множиною значень — множина $E(s) = \{80; 120; 160; 200; 240; 280; 320\}$.

У прикладі 3 областю визначення функції є значення t , що задовольняють нерівність $0 \leq t \leq 24$, або $t \in [0; 24]$, а областю значень є $-7 \leq T \leq 5$, або $T \in [-7; 5]$. Зазначені множини можна дістати, якщо графік функції спроектувати відповідно на вісь Ot і вісь температур OT (див. мал. 1).

Наведені вище приклади ілюструють основні способи задання функцій: аналітичний, або за допомогою формули (приклад 1), табличний (приклад 2), графічний (приклад 3).

Якщо функцію задано аналітично і не зазначено її області визначення, то під останньою розуміють множину всіх дійсних значень аргументу, за яких цей аналітичний вираз має зміст. Розглянемо приклади.



Мал. 3



Задача 1. Дано функцію $f(x) = \sqrt{x+1}$. 1) Знайдіть область визначення функції; 2) визначте область значень функції; 3) обчисліть значення функції в точці, а саме: $f(0)$, $f\left(\frac{5}{4}\right)$, $f(8)$; 4) чи існують значення функції в точках $x = -2$; $-\frac{3}{2}$?

каж $x = -2$; $-\frac{3}{2}$?

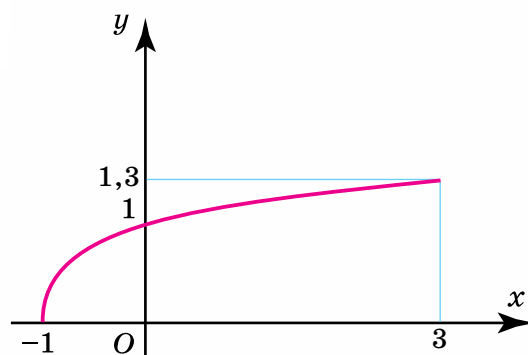
Розв'язання. 1. З огляду на властивість квадратного кореня дана формула матиме зміст для всіх значень x , для яких $x+1 \geq 0$, або $x \geq -1$, тобто областю визначення функції є множина $[-1; +\infty)$, $D(f) = [-1; +\infty)$. 2. Область значень даної функції становлять значення $y = f(x) \geq 0$, тобто $E(f) = [0; +\infty)$, бо значення арифметичного квадратного кореня невід'ємні. 3. Знайдемо значення $f(0)$. Для цього в дану формулу замість x підставимо 0. Тоді одержимо: $f(0) = \sqrt{0+1} = 1$.

Аналогічно $f\left(\frac{5}{4}\right) = \sqrt{\frac{5}{4}+1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$; $f(8) = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$.

4. Оскільки значення $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$ не належать області визначення функції, тобто $-2 \notin [-1; +\infty)$, $-\frac{3}{2} \notin [-1; +\infty)$, то функція в цих точках не визначена. Справді, якщо формально підставити значення $x = -2$ і $x = -\frac{3}{2}$ у задану формулу, то одержимо вирази $\sqrt{-1}$ і $\sqrt{-\frac{3}{2}}$, що на множині дійсних чисел не мають змісту.



Задача 2. Функцію задано графічно (мал. 4). Знайдіть: 1) область визначення функції; 2) область значень функції.



Мал. 4

Розв'язання. 1. Абсиси точок графіка даної функції змінюються від -1 до 3 , тому $D(f) = [-1; 3]$.

2. Ординати точок графіка даної функції змінюються від 0 до $1,3$, тому $E(f) = [0; 1,3]$.

Область визначення функції є проекцією її графіка на вісь Ox , а область значень — проекцією графіка на вісь Oy .

2. ЗРОСТАННЯ ТА СПАДАННЯ ФУНКЦІЙ

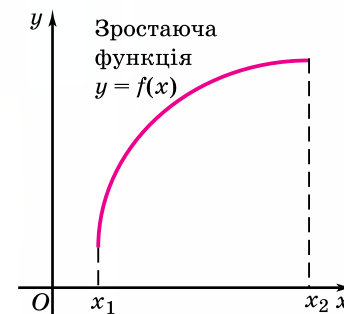
Нехай функція $f(x)$ визначена на множині D .



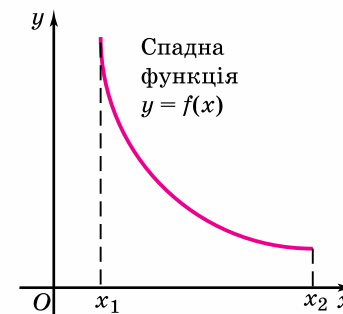
Функція $f(x)$ називається зростаючою на множині D , якщо для довільних значень x_1 та x_2 цієї множини з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, тобто більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції (мал. 5).



Функція $f(x)$ називається спадною на множині D , якщо для довільних значень x_1 та x_2 цієї множини з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) < f(x_1)$, тобто більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції (мал. 6).



Мал. 5



Мал. 6

Зростаючі та спадні функції називають *монотонними*.



Схема дослідження функції $y = f(x)$ на монотонність

1. Знайти область визначення функції $D(f)$.

2. Дослідити на знак різницю $f(x_2) - f(x_1)$ для довільних $x_1, x_2 \in D(f)$, якщо $x_2 > x_1$.

Якщо $f(x_2) - f(x_1) > 0$, то функція буде зростаючою на множині D ; якщо $f(x_2) - f(x_1) < 0$, то спадною на цій множині. Якщо жодна із цих умов не виконується, то функція не є монотонною в усій її області визначення. У такому випадку намагаються знайти окремі проміжки області визначення функції, на яких вона є монотонною.

Проілюструємо це на прикладах.



Задача 3. Дослідіть на монотонність функцію $f(x) = 3x - 1$.

Розв'язання. Областю визначення заданої функції є множина всіх дійсних чисел, $D(f) = \mathbb{R}$.

Нехай $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ — довільні значення аргументу, причому $x_2 > x_1$, тобто $x_2 - x_1 > 0$. Відповідні значення функції: $f(x_1) = 3x_1 - 1$ і $f(x_2) = 3x_2 - 1$.

Розглянемо різницю $f(x_2) - f(x_1) = 3x_2 - 1 - 3x_1 + 1 = 3(x_2 - x_1) > 0$.

Отже, $f(x_2) > f(x_1)$ і задана функція зростає в усій області визначення.



Задача 4. Покажіть, що функція $\varphi(x) = 2x^2 + 5$ на проміжку $(-\infty; 0]$ є спадною, а на проміжку $[0; +\infty)$ — зростаючою.

Розв'язання. Областю визначення функції $\varphi(x) = 2x^2 + 5$ є множина всіх дійсних чисел, $D(\varphi) = R$.

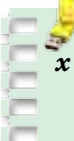
Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з області визначення функції, причому $x_2 > x_1$, тобто $x_2 - x_1 > 0$.

Тоді $\varphi(x_1) = 2x_1^2 + 5$; $\varphi(x_2) = 2x_2^2 + 5$;

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = 2x_2^2 + 5 - 2x_1^2 - 5 = 2x_2^2 - 2x_1^2 = 2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

Якщо $x_1, x_2 \in (-\infty; 0]$, то $x_1 + x_2 < 0$, й оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) < 0$, або $\varphi(x_2) < \varphi(x_1)$, тобто на проміжку $(-\infty; 0]$ функція є спадною. Аналогічно, якщо $x_1, x_2 \in [0; +\infty)$, то $x_1 + x_2 > 0$, й оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) > 0$, або $\varphi(x_2) > \varphi(x_1)$, тобто на проміжку $[0; +\infty)$ функція є зростаючою.

3. ПАРНІ ТА НЕПАРНІ ФУНКЦІЇ

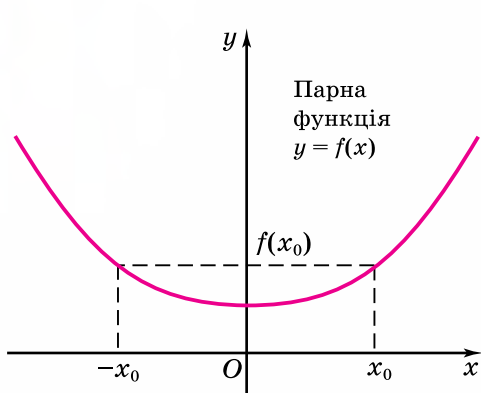


Нехай функція $f(x)$ визначена на множині D , причому якщо $x \in D$, то $-x \in D$.

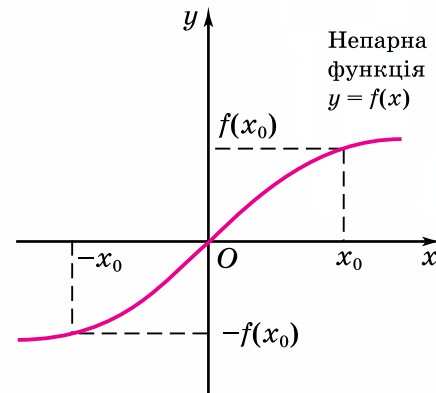
Функція $f(x)$ називається парною, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in D$.

Функція $f(x)$ називається непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in D$.

Отже, області визначення як парної, так і непарної функцій симетричні відносно початку координат, і для протилежних значень аргументу значення парної функції збігаються, а непарної — є протилежними числами. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy , а графік непарної функції симетричний відносно початку координат (мал. 7, 8).



Мал. 7



Мал. 8



Схема дослідження функції $y = f(x)$ на парність і непарність

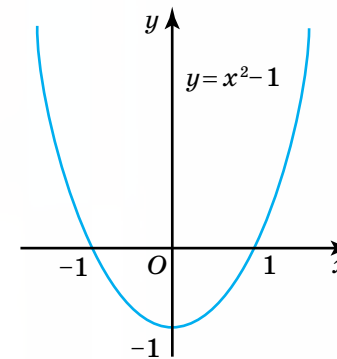
1. Знайти область визначення функції $D(f)$ і переконатися, що вона симетрична відносно початку координат. Якщо ця умова не виконується, то така функція не може бути ні парною, ні непарною.

2. Знайти значення функції $f(-x)$ і порівняти його з $f(x)$: якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in D(f)$, то функція *парна*; якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in D(f)$, то функція *непарна*. Якщо жодна із цих умов не виконується, то функція не є ні парною, ні непарною.

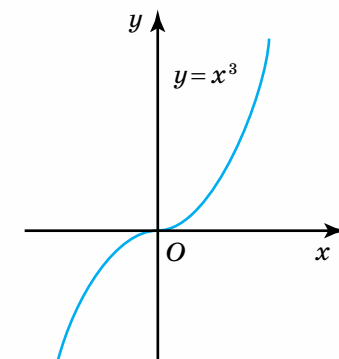


Задача 5. Дослідіть на парність функцію $f(x) = x^2 - 1$.

Розв'язання. 1. $D(f) = R$. 2. $f(-x) = x^2 - 1 = f(x)$ для всіх x із множини R . Отже функція є парною. Її графік симетричний відносно осі Oy (мал. 9).



Мал. 9



Мал. 10



Задача 6. Дослідіть на парність функцію $\varphi(x) = x^3$.

Розв'язання. 1. $D(\varphi) = R$.

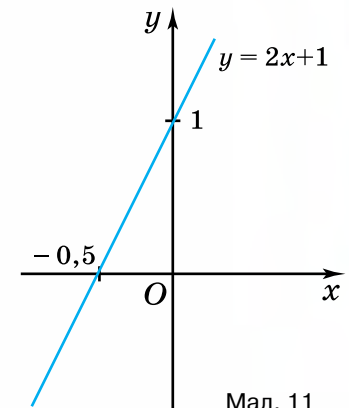
2. $\varphi(-x) = -x^3 = -\varphi(x)$ для всіх x із множини R . Отже функція є непарною. Її графік симетричний відносно осі Oy (мал. 10).



Задача 7. Дослідіть на парність функцію $g(x) = 2x + 1$.

Розв'язання. 1. $D(g) = R$.

2. $g(-x) = 2 \cdot (-x) + 1 = -2x + 1$. Оскільки $g(x) \neq g(-x)$ і $g(x) \neq -g(-x)$, то функція не є ні парною, ні непарною (мал. 11).



Мал. 11



Задача 8.

Функція $u(x) = \sqrt{x+1}$, $D(u) = [-1; +\infty)$, не є ні парною, ні непарною, бо її область визначення не симетрична відносно початку координат.



Функція $v(x) = 0$, $D(v) = R$, одночасно є і парною, і непарною (обґрунтуйте). Її графіком є вісь Ox .



Дізнайтеся більше

1. Функцію також можна задавати різними аналітичними виразами на окремих проміжках зміни незалежної змінної. Наприклад, треба знайти аналітичний вираз для функції $s = s(t)$, яка виражає шлях руху парашутиста залежно від часу t (у секундах, s) під час падіння з літака, якщо після стрибка парашутист вільно падає a с, а потім розкриває парашут і b с падає зі сталою швидкістю v_0 .

• Очевидно, що за проміжок часу $0 \leq t \leq a$ шлях парашутиста визначається формулою $s = \frac{gt^2}{2}$.

За a (секунд) він пролетить шлях $\frac{ga^2}{2}$, після чого кожної наступної секунди його швидкість дорівнюватиме v_0 , тому за проміжок часу $a \leq t \leq a+b$ його шлях визначатиметься формулою $s = \frac{ga^2}{2} + v_0(t-a)$.

Отже, дістанемо функцію:

$$s(t) = \begin{cases} \frac{gt^2}{2}, & \text{якщо } 0 \leq t \leq a, \\ \frac{ga^2}{2} + v_0(t-a), & \text{якщо } a \leq t \leq a+b. \end{cases}$$

Областю визначення цієї функції є $0 \leq t \leq a+b$, або $t \in [0; a+b]$, а областю значень є

$$0 \leq s \leq \frac{ga^2}{2} + v_0b, \text{ або } s \in \left[0; \frac{ga^2}{2} + v_0b\right].$$

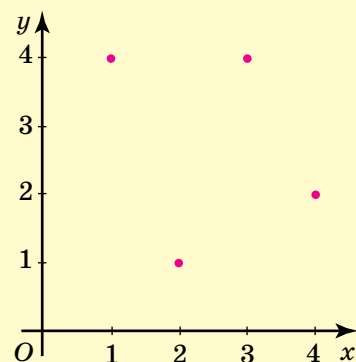
2. Нехай кожному натуральному числу n відповідає n -й десятковий знак наближеного значення числа $\sqrt{2}$. Чи задає така відповідність функцію?

• Відомо, що $\sqrt{2}$ є ірраціональним числом і $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$, причому кожному $n \in \mathbb{N}$ відповідає один і тільки один десятковий знак цього нескінченного неперіодичного десяткового дробу. Тому дана відповідність задає функцію $y = \varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, яку називають *числовою послідовністю*.

Наприклад, $\varphi(1) = 4$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 4$, $\varphi(4) = 2$ (мал. 12).

Зазначимо, що це приклад функції, заданої *словесно*.

3. Термін «функція» запровадив німецький математик Г. Лейбніц (1646—1716), який функцію пов'язував із графіком. Л. Ейлер (1707—1783) і Й. Бернуллі (1667—1748) вважали функцію аналітичним виразом (формулою). Згодом Л. Ейлер увів загальніший підхід до поняття функції як залежності однієї змінної величини від іншої. Цю точку зору було далі розвинено у працях російського математика М. І. Лобачевського (1792—1856), німецького математика П. Діріхле (1805—1859) та інших вчених.



Мал. 12



Г. Лейбніц



Остроградський М.В.



Кравчук М.П.

Важливий внесок у розвиток теорії функцій зробили українські математики Остроградський М.В. (1801—1862), Буняковський В.Я. (1804—1889), Кравчук М.П. (1892—1942), Ремез Є.Я. (1896—1975), Дзядик В.К. (1919—1998) та інші.



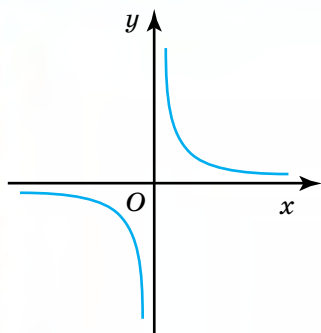
Пригадайте головне

1. Дайте означення функції.
2. Що називають областю визначення та областю значень функції? Наведіть приклади.
3. Які ви знаєте способи задання функції?
4. Що таке графік функції? Чи будь-яка крива на координатній площині є графіком функції?
5. Як для функції, заданої графічно, знайти область її визначення та область значень?
6. Яку функцію називають зростаючою; спадною? Наведіть приклади.
7. Яку функцію називають парною; непарною? Наведіть приклади.

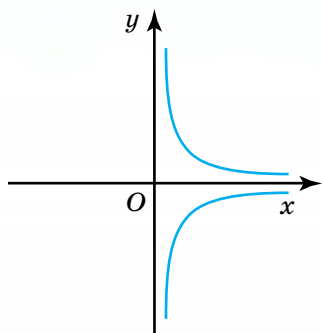
Розв'яжіть задачі



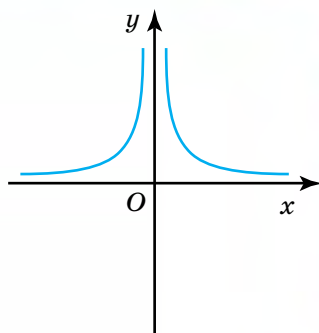
- 1'. Чи правильно, що областю визначення числової функції є множина:
 - 1) усіх можливих значень аргументу;
 - 2) деяких значень незалежної змінної;
 - 3) усіх значень залежної змінної?
- 2'. Наведіть приклад функції, заданої аналітично.
- 3'. На якому з малюнків 13 — 16 задано функцію? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 13



Мал. 14



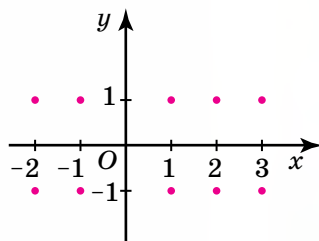
Мал. 15

4°. Чи правильно, що точка $O(0; 0)$ належить графіку функції:

1) $y = -x^2$; 2) $y = x^2 + 5x + 6$;

3) $y = \sqrt{x-4}$; 4) $y = \frac{3}{x}$?

5°. Заповніть таблицю 2, якщо функцію задано формулою $y = \frac{x}{2x-1}$.



Мал. 16

Таблиця 2

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

6°. Заповніть таблицю 3, якщо функцію задано формулою $y = -3x^2 + 1$.

Таблиця 3

x	-2	-1	0	1	2	3
y						

7°. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = 4x + 1$;

3) $y = x^2 + 4x$;

5) $y = \sqrt{x+3}$;

2) $y = -x - 2$;

4) $y = -x^2 + 1$;

6) $y = \frac{3}{2(x-1)}$.

8°. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{4x+1}$; 2) $y = -2x+3$; 3) $y = x^2-5$; 4) $y = \frac{5}{x}$.

9°. Знайдіть область значень функції: 1) $y = 2,2$; 2) $y = -x+4$;

3) $y = -\sqrt{x}$; 4) $y = 2\sqrt{x}$; 5) $y = x^2-5$; 6) $y = x^2+3$.

10°. Знайдіть область значень функції:

1) $y = 5$; 2) $y = 7x$;

3) $y = \sqrt{x} + 2$; 4) $y = x^2 - 1$.

11°. За графіком функції $y = f(x)$ (мал. 17) знайдіть:

1) область визначення;

2) область значень;

3) $f(0)$, $f(-3)$, $f(5)$, $f\left(\frac{5}{2}\right)$;

4) точки перетину з осями координат;

5) значення x , за яких $f(x) = 4$, $f(x) = 2$, $f(x) = -2$;

6) проміжки монотонності функції.

12°. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2x + 1$; 2) $y = x^2 - 2$; 3) $y = \sqrt{x} - 3$; 4) $y = -\frac{2}{x}$.

Знайдіть: 1) область визначення функції; 2) область значень функції.

13°. Побудуйте графік функції:

1) $y = -x + 1$; 2) $y = x^2 + 2$; 3) $y = \sqrt{x} + 1$.

Знайдіть: 1) область визначення функції; 2) область значень функції.

14°. Користуючись означенням, дослідіть функцію на монотонність:

1) $y = 3x + 1$; 3) $y = x^2 - 2$; 5) $y = \frac{1}{x}$.

2) $y = -2x + 3$; 4) $y = -2x^2 - 1$;

15°. Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y = -2x$; 2) $y = 5 - x^2$; 3) $y = \sqrt{x-1} + 1$; 4) $y = -\frac{2}{x}$? Відповідь поясніть.

16°. Дослідіть функцію на парність та непарність:

1) $y = 3x + 1$; 3) $y = x^2 - 2$; 5) $y = \frac{1}{x}$.

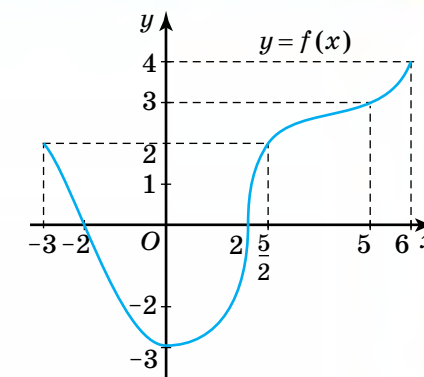
2) $y = -2x + 3$; 4) $y = -2x^2 - 1$;

17°. Парною чи непарною є функція:

1) $y = -2x$; 2) $y = 5 - x^2$; 3) $y = \sqrt{x-1} + 1$; 4) $y = -\frac{2}{x}$?

Відповідь поясніть.

18. У коло радіуса r вписано $\triangle ABC$, сторона AB якого збігається з діаметром кола. Знайдіть залежність катета $AC = b$ від катета $BC = x$, якщо вершина C трикутника пробігає півколо.



Мал. 17

19. Знайдіть залежність довжини b одного катета прямокутного трикутника від довжини a другого катета, якщо гіпотенуза $c = 5$.

20. Одна сторона прямокутника дорівнює x (см), а друга — на 3 см менша. Якими формулами визначаються залежності периметра та площі прямокутника від його сторони?

21. Рухаючись зі швидкістю v км/год протягом 6 год, автомобіль пройшов шлях s км. Задайте формулою залежність s від v . Користуючись цією формулою: а) знайдіть s , якщо $v = 65$ км/год; б) знайдіть v , якщо $s = 363$ км.

22. Знайдіть невідому координату точки, якщо вона належить графіку функції

$$y = \frac{2x+5}{3} : A(0; y), B(x; 0), C(-2; y), D(x; 0, 5).$$

23. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = x + \sqrt{x}; \quad 3) y = \frac{1}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{2x-1}; \quad 5) y = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+1};$$

$$2) y = \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{2-x}}; \quad 4) y = \sqrt{x} + 2\sqrt{-x}; \quad 6) y = x^2 - 6x + 5.$$

24. Знайдіть область визначення функції:

$$1) y = \frac{2x}{x^2+1}; \quad 3) y = \frac{1}{x^2-x} + 2x;$$

$$2) y = \sqrt{5-2x} + 1; \quad 4) y = \frac{3x-1}{x^2-3x+2}.$$

$$25. f(x) = \begin{cases} -4, & \text{якщо } x < -1, \\ 2x-2, & \text{якщо } -1 \leq x < 3, \\ 4, & \text{якщо } x \geq 3. \end{cases}$$

Яке із співвідношень є правильним:

$$1) f(-2) = -f(2); \quad 2) f(0) < f(-3); \quad 3) f(4) > f(1); \quad 4) \frac{f(-2)}{f(2)} > 0?$$

$$26. f(x) = \begin{cases} x+9, & \text{якщо } -9 \leq x < 0, \\ x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 9. \end{cases}$$

Яке із співвідношень є правильним:

$$1) f(-1) < f(1); \quad 3) f(0) = f(9); \\ 2) f(-2) \neq f(2); \quad 4) f(-9) = f(0)?$$

Дослідіть дану функцію на монотонність.

27. Яка із заданих функцій є парною; непарною; ні парною, ні непарною:

$$1) y = 5x^2 + 1; \quad 3) y = 3x - \frac{2}{x}; \quad 5) y = \sqrt[3]{x} + x; \\ 2) y = x^5 + 3x^3 - x; \quad 4) y = 4x^2 + |x|; \quad 6) y = \sqrt[3]{x^3 + 5}.$$

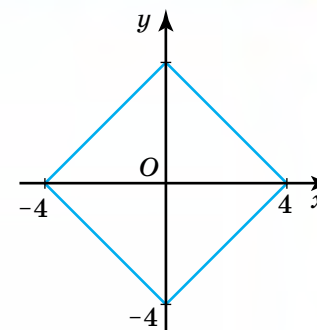
28. Яка із заданих функцій є парною; непарною; ні парною, ні непарною:

$$1) y = 2x^4 - x^3 + 1;$$

$$2) y = \frac{|x|}{2x};$$

$$3) y = \sqrt{x} + 8x?$$

29*. Яку з множин точок наведено на малюнку 18? Поясніть, чому ця множина функцію не задає.



Мал. 18

30*. Нехай $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$. Знайдіть значення x ,

за яких:

$$1) f(x) = 0; \quad 2) 0 < f(x) < 1; \quad 3) |f(x)| \leq 2.$$

31*. Функцію задано таблицею 4.

Таблиця 4

x	4	6	-10	-12	20
y	-2	-3	5	6	-10

За таблицею значень x і y запишіть залежність y від x у вигляді формули.

32*. Знайдіть область визначення й область значень функції:

$$1) y = -x^2 + 6x - 4; \quad 3) y = x^2 - 8x + 13; \quad 5) y = \frac{x}{1+x^2};$$

$$2) y = 2 - |x|; \quad 4) y = \sqrt{25-x^2}; \quad 6) y = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}.$$

33*. Функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-1; 0]$. Яка область визначення функції:

$$1) f(2x); \quad 2) f(-x^2); \quad 3) f(|x| + x)?$$

Проявіть компетентність

34. З турбази на станцію, віддалену на відстань 60 км, вирушив велосипедист зі швидкістю 12 км/год. Знайдіть формулу залежності змінної s від t , де s — відстань велосипедиста від станції в кілометрах, а t — час його руху в годинах.

35. Наведіть приклад аналітично заданої функції, областю визначення якої є:

$$1) \text{ відрізок } [-1; 1];$$

$$2) \text{ множина всіх дійсних чисел, крім точок } x = \pm 2.$$



§2 Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

Узагальнимо за допомогою таблиці відомі вам перетворення графіків функцій, які використовують при побудові графіків функціональних залежностей.

Таблиця 5. Найпростіші перетворення графіків функцій

Побудувати графік функції	Геометричні перетворення графіка функції $f(x)$	Ілюстрації
1. $f(x) + a$	Паралельно перенести на відстань $ a $ вздовж осі Oy (вгору, якщо $a > 0$, і вниз, якщо $a < 0$)	
2. $f(x + a)$	Паралельно перенести на відстань $ a $ вздовж осі Ox (ліворуч, якщо $a > 0$, і праворуч, якщо $a < 0$)	
3. $-f(x)$	Відобразити симетрично відносно осі Ox	
4. $kf(x)$ ($k > 0$)	Ординату кожної точки графіка збільшити в k разів, якщо $k > 1$, і зменшити у $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$	

За графіком можна встановлювати основні властивості функції: область визначення, множину значень, проміжки монотонності, парність і непарність, нулі функції (точки x , у яких $f(x) = 0$).

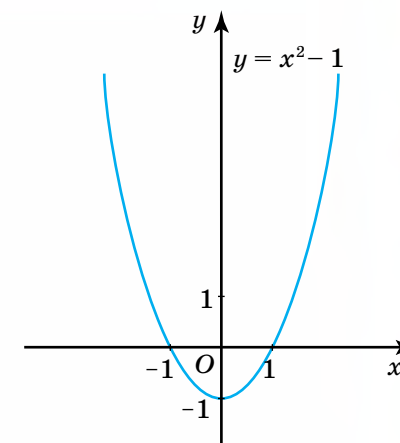
При розв'язуванні наступних прикладів будемо користуватися таблицею 5.



Задача 1. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 1$.

Розв'язання. Для побудови графіка цієї функції використаємо перетворення 1, а саме: графік функції $y = x^2$ паралельно перенесемо вздовж осі Oy на одну одиницю вниз (мал. 19). Сформулюємо властивості функції за її графіком.

- 1) Область визначення $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Область значень $E(f) = [-1; +\infty)$.
- 3) Функція спадна на інтервалі $(-\infty; 0)$ і зростаюча на інтервалі $(0; +\infty)$.
- 4) Функція парна на множині $D(f)$, оскільки її графік симетричний відносно осі Oy .
- 5) Нулями функції є значення $x = \pm 1$.



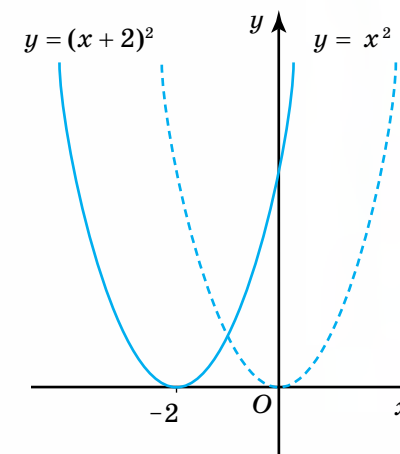
Мал. 19



Задача 2. Побудуйте графік функції $y = (x + 2)^2$.

Розв'язання. Графік функції $y = (x + 2)^2$ дістанемо, якщо графік функції $y = x^2$ паралельно перенесемо вздовж осі Ox на 2 одиниці ліворуч (перетворення 2) (мал. 20). Сформулюємо властивості функції за її графіком.

- 1) Область визначення $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Область значень $E(f) = [0; +\infty)$.
- 3) Функція спадна на проміжку $(-\infty; -2]$ і зростаюча на проміжку $[-2; +\infty)$.
- 4) Функція ні парна, ні непарна.
- 5) $x = -2$ — нуль функції.



Мал. 20

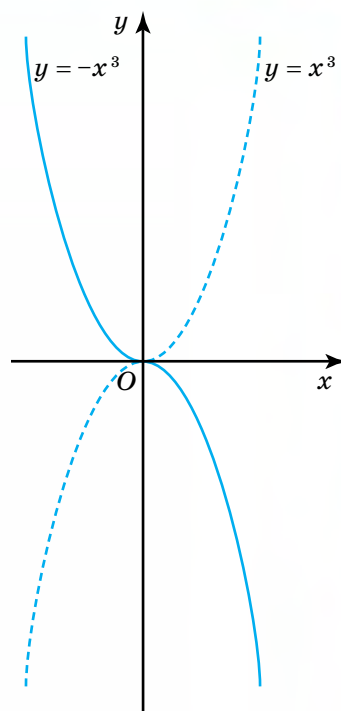


Задача 3. Побудуйте графік функції $y = -x^3$.

Розв'язання. Відповідно до перетворення 3 графік функції $y = x^3$ симетрично відобразимо відносно осі Ox (мал. 21).

Сформулюємо властивості функції за її графіком.

- 1) Область визначення $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Область значень $E(f) = (-\infty; +\infty)$.
- 3) Функція спадає на інтервалі $(-\infty; +\infty)$.
- 4) Функція непарна на множині $D(f)$, оскільки її графік симетричний відносно початку координат.
- 5) $f(x) > 0$, $x \in (-\infty; 0)$; $f(x) < 0$, $x \in (0; +\infty)$, $x = 0$ — нуль функції.



Мал. 21



Задача 4. Побудуйте графік функції:

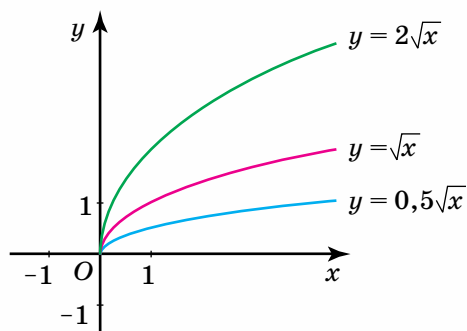
- 1) $y = 2\sqrt{x}$; 2) $y = 0,5\sqrt{x}$.

Розв'язання.

1. Графік функції $y = 2\sqrt{x}$ дістанемо, якщо ординату кожної точки графіка функції $y = \sqrt{x}$ збільшимо вдвічі (мал. 22).
2. Графік функції $y = 0,5\sqrt{x}$ дістанемо, якщо ординату кожної точки графіка функції $y = \sqrt{x}$ зменшимо вдвічі (див. мал. 22).

Сформулюємо властивості кожної функції за її графіком.

- 1) Область визначення $D(f) = [0; +\infty)$.
- 2) Область значень $E(f) = [0; +\infty)$.
- 3) Функція зростає на інтервалі $(-\infty; +\infty)$.
- 4) Функція ні парна, ні непарна.
- 5) $f(x) \geq 0$, $x \in D(f)$, $x = 0$ — нуль функції.



Мал. 22

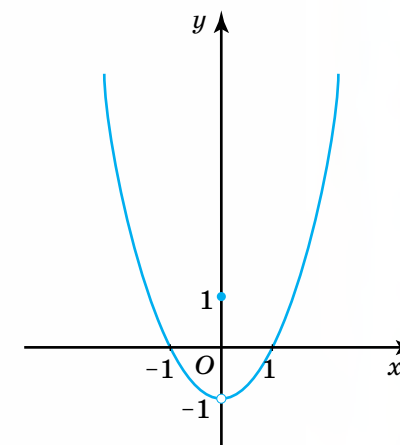


Задача 5. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Спочатку побудуємо графік функції $y = x^2 - 1$, якщо $x \neq 0$. Для побудови графіка цієї функції використаємо перетворення 1, а саме: графік функції $y = x^2$ паралельно перенесемо вздовж осі Oy на одну одиницю вниз і виключимо точку $(0; -1)$. До побудованого графіка приєднаємо точку $(0; 1)$ (мал. 23).

Сформулюємо властивості функції за її графіком.

- 1) Область визначення $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
- 2) Множина значень $E(f) = (-1; +\infty)$.
- 3) Функція спадає на інтервалі $(-\infty; 0)$ і зростає на інтервалі $(0; +\infty)$.
- 4) Функція парна на множині $D(f)$, оскільки її графік симетричний відносно осі Oy .
- 5) Нулями функції є $x = \pm 1$.



Мал. 23



Дізнайтеся більше

1. Розглянемо побудову графіка складнішої функції.

Побудуйте графік функції: $y = \frac{2x+3}{x}$.

Розв'язання. У цьому випадку маємо $f(x) = \frac{2x+3}{x} = 2 + \frac{3}{x}$.

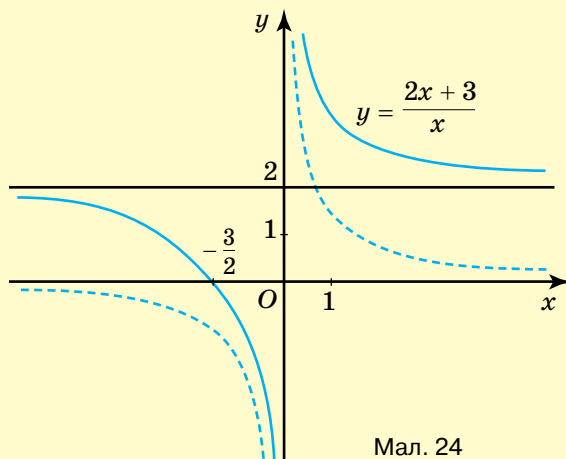
Отже, графік даної функції можна дістати за допомогою перетворення графіка гіперболи $y = \frac{1}{x}$.

Спочатку застосуємо перетворення 5: ординату кожної точки гіперболи $y = \frac{1}{x}$ збільшимо в 3 рази, потім гіперболу $y = \frac{3}{x}$ за допомогою перетворення

1 перенесемо паралельно вздовж осі Oy на 2 одиниці вгору (мал. 24).

Сформулюємо властивості функції за її графіком.

- 1) Область визначення $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
- 2) Множина значень $E(f) = (-\infty; +\infty)$.
- 3) Функція спадає у своїй області визначення.
- 4) Функція не є ні парною, ні непарною.
- 5) $f(x) \geq 0$, якщо $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup (0; +\infty)$ і $f(x) < 0$, якщо $x \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right)$, причому $f(x) = 0$, якщо $x = -\frac{3}{2}$ (нуль функції).

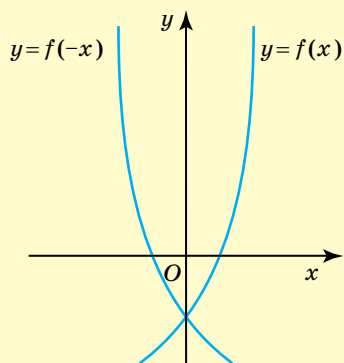


Мал. 24

2. Наведемо приклади ще деяких перетворень, які використовують для побудови графіків функцій.

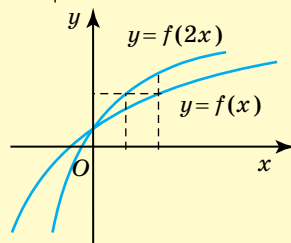
1. $f(-x)$

Графік функції $f(x)$ відобразити симетрично відносно осі Oy



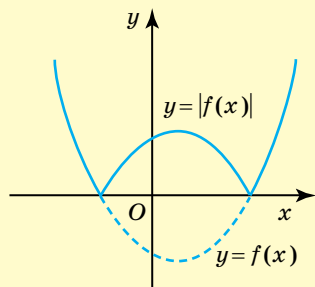
2. $f(kx)$ ($k > 0$)

Абсцису кожної точки графіка функції $f(x)$ збільшити в $\frac{1}{k}$ раза, якщо $0 < k < 1$, і зменшити у k разів, якщо $k > 1$



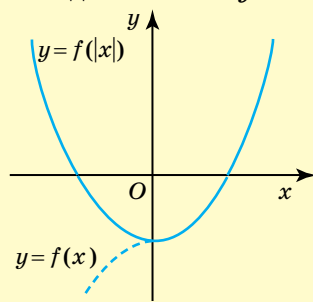
3. $|f(x)|$

Залишити без змін ті частини графіка функції $f(x)$, де $f(x) \geq 0$, а ті частини графіка, де $f(x) < 0$, — відобразити симетрично відносно осі Ox



4. $f(|x|)$

Залишити без змін ту частину графіка функції $f(x)$, яка відповідає невід'ємним значенням x , і приєднати до неї її образ, симетричний відносно осі Oy



Пригадайте головне

1. Як можна отримати графік функції $y = f(x) + a$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
2. Як можна отримати графік функції $y = f(x + a)$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
3. Як можна отримати графік функції $y = -f(x)$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
4. Як можна отримати графік функції $y = kf(x)$ ($k \neq 0$), використовуючи графік функції $y = f(x)$?

Розв'яжіть задачі



- 36'. Наведіть приклади найпростіших перетворень графіків функцій.
- 37'. Як за графіком функції знайти її область визначення? Область значень? Наведіть приклад.
- 38'. Як за графіком функції з'ясувати, зростає чи спадає функція? Наведіть приклад.
- 39'. Як за графіком функції встановити, парною чи непарною є функція? Наведіть приклад.
- 40'. Як за графіком функції визначити проміжки знакосталості функції? Нулі функції? Наведіть приклад.
- 41'. Опишіть, як за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y = f(x)$ побудувати графік функції:
- 1) $y = f(x) + 2$;
 - 2) $y = f(x - 1)$;
 - 3) $y = 3f(x)$.
- Покажіть це на малюнку.
- 42'. Покажіть на малюнку, як за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y = f(x)$ побудувати графік функції:
- 1) $y = f(x) - 3$;
 - 2) $y = f(x + 5)$.
- 43'. Користуючись геометричними перетвореннями графіків функцій $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$, побудуйте графік функції:
- 1) $y = x^2 - 2$;
 - 2) $y = (x - 2)^2$;
 - 3) $y = x^2 + 3$;
 - 4) $y = 3\sqrt{x}$;
 - 5) $y = \sqrt{x - 2}$;
 - 6) $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$;
- Сформулюйте властивості функції за її графіком.
- 44'. Задано графік функції $f(x) = x^2$. Побудуйте графік функції:
- 1) $f(x - 1)$;
 - 2) $-f(x)$;
 - 3) $f(x) + 1$.
- 45'. Побудуйте графік функції та схарактеризуйте її властивості:
- 1) $y = 3x^2$;
 - 2) $y = -3x^2$;
 - 3) $y = -\frac{1}{3}x^2$;
 - 4) $y = \frac{1}{3}x^2$;
 - 5) $y = 3\sqrt{x}$;
 - 6) $y = -3\sqrt{x}$.

46. Задайте формулою функцію, якщо її графік одержано у результаті переміщення графіка функції $y = x^2$:

- | | |
|------------------------|-----------------------------|
| 1) на 3 одиниці вгору; | 4) на 3 одиниці праворуч; |
| 2) на 4 одиниці вниз; | 5) на 2 одиниці ліворуч; |
| 3) на 2 одиниці вниз; | 6) на 1,5 одиниці праворуч. |

47. Задайте формулою функцію, якщо її графік одержано у результаті переміщення графіка функції $y = \sqrt{x}$:

- | | |
|------------------------|---------------------------|
| 1) на 4 одиниці вгору; | 3) на 5 одиниць праворуч; |
| 2) на 8 одиниць вниз; | 4) на 10 одиниць ліворуч. |

48. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{x} + 1$; 2) $y = \frac{2}{x} + 2$; 3) $y = \frac{1}{x} - 4$; 4) $y = \frac{1}{x+4}$.

Сформулюйте властивості функції за її графіком.

49. Побудуйте графік функції: 1) $y = \frac{1}{x} + 3$; 2) $y = \frac{1}{x-3}$.

Сформулюйте властивості функції за її графіком.

50*. Графік якої функції дістанемо, якщо виконаємо такі перетворення графіка функції $y = \frac{1}{x}$:

- 1) значення ординати кожної точки графіка збільшимо в $\frac{3}{2}$ раза;
- 2) відобразимо графік симетрично відносно осі Ox ;
- 3) перенесемо паралельно вздовж осі Ox на $\frac{1}{2}$ одиниці праворуч?

Сформулюйте властивості функції за її графіком.

51*. Користуючись означенням модуля числа, побудуйте графік функції та схарактеризуйте її властивості:

1) $y = |x|$; 2) $y = |x| + 1$; 3) $y = |x - 1|$; 4) $y = |x^2 - 4|$.

Проявіть компетентність

52. Андрій проводив експерименти щодо вільного падіння кульки. Швидкість вільного падіння тіла задається формулою $v = \sqrt{2gH}$, де v — швидкість, H — висота, g — прискорення вільного падіння, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.

- 1) Кулька падає з висоти 1 м. З якою швидкістю вона впаде на землю?
- 2) У скільки разів збільшиться швидкість кульки, якщо висоту збільшити у 3 рази, 5, 10 разів?
- 3) Побудуйте графік залежності швидкості падіння кульки від висоти.



Корінь n -го степеня. Арифметичний корінь n -го степеня та його властивості

1. ПОНЯТТЯ КОРЕНЯ n -ГО СТЕПЕНЯ

Ви вже знаєте, що квадратним коренем із числа a називають таке число, квадрат якого дорівнює a . Сформулюємо означення кореня будь-якого натурального степеня $n > 1$.

Коренем n -го степеня з дійсного числа a називають число, n -ий степінь якого дорівнює a .

Наприклад коренем четвертого степеня з числа 81 є число 3, бо $3^4 = 81$; коренем третього степеня з числа 8 є число 2, оскільки $2^3 = 8$.

? Чому для n вводять обмеження: $n > 1$? Бо, за властивістю степенів, $a^1 = a$.

Знаходження кореня n -го степеня з числа a називають *добуванням кореня n -го степеня*.

З означення кореня n -го степеня випливає, що добути корінь n -го степеня з дійсного числа a — це все одно, що знайти дійсні розв'язки рівняння:

$$x^n = a, n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Проаналізуємо розв'язки рівняння (1).

1. Якщо $a = 0$, то за будь-якого натурального значення n рівняння (1) має єдиний корінь $x = 0$.

2. Якщо n — парне число й $a < 0$, то рівняння (1) не має коренів, оскільки немає жодного дійсного числа, парний степінь якого дорівнював би від'ємному числу.

Якщо n — парне число й $a > 0$, то рівняння (1) має два дійсні корені, які є протилежними за знаком числами. Наприклад, $x^2 = 9$, $x = \pm 3$.

3. Якщо n — непарне число й $a > 0$, то рівняння (1) має один дійсний додатний корінь. Наприклад, $x^3 = 8$, $x = 2$.

Якщо n — непарне число й $a < 0$, то рівняння (1) має один дійсний від'ємний корінь. Наприклад, $x^3 = -27$, $x = -3$.



Зверніть увагу:

- 1) корінь n -го степеня із числа 0 дорівнює 0;
- 2) корінь парного степеня з додатного дійсного числа має два значення, що є однаковими за модулем і протилежними за знаком;
- 3) кореня парного степеня з від'ємного дійсного числа не існує;
- 4) корінь непарного степеня з довільного дійсного числа має одне значення, причому додатне, якщо число додатне, і від'ємне, якщо число від'ємне.

2. АРИФМЕТИЧНИЙ КОРІНЬ n -ГО СТЕПЕНЯ З ДІЙСНОГО ЧИСЛА

Розглянуті випадки розв'язування рівняння (1) показують, що це рівняння має невід'ємний дійсний корінь, як у разі парного, так і в разі непарного n , якщо $a \geq 0$. Цей корінь називають *арифметичним* коренем n -го степеня із числа a .



Арифметичним коренем n -го степеня із числа $a \geq 0$ називають невід'ємне число, n -ий степінь якого дорівнює a .

Записуємо: $\sqrt[n]{a}$ і говоримо: арифметичний корінь n -го степеня з a .

У виразі $\sqrt[n]{a}$ число a називають *підкореневим виразом*, а число n — *показником кореня*.



Ви знаєте, що знак $\sqrt{}$ називають радикалом. Він замінює термін «арифметичний квадратний корінь». Аналогічно, знак $\sqrt[n]{}$ замінює термін «арифметичний корінь n -го степеня». Іноді слово «арифметичний» у цій назві опускають і говорять коротше: «корінь n -го степеня», але розуміють, що йдеться саме про арифметичний корінь n -го степеня.

Отже, за означенням арифметичного кореня n -го степеня з числа a рівність $\sqrt[n]{a} = b$, означає що $b^n = a$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Наприклад: $\sqrt[4]{16} = 2$, оскільки $2^4 = 16$; $\sqrt[5]{32} = 2$, оскільки $2^5 = 32$.



Якщо $n = 2$, то пишемо $\sqrt{a}$ (показник 2 не записуємо) і говоримо: «корінь квадратний з a ».



Якщо $n = 3$, то пишемо $\sqrt[3]{a}$ і говоримо: «корінь кубічний з a ».

З означення арифметичного кореня n -го степеня випливає:

- 1) вираз $\sqrt[n]{a}$ має зміст, лише якщо $a \geq 0$;
- 2) вираз $\sqrt[n]{a}$ може набувати лише невід'ємних значень;
- 3) рівність $(\sqrt[n]{a})^n = a$ — правильна за будь-якого невід'ємного значення a .

Відповідно до введеного поняття арифметичного кореня розв'язки рівняння $x^2 = 36$, що є протилежними за знаком числами, записують так:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{36} = \pm 6.$$

Крім того, для коренів парного степеня:

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0 \end{cases}, k \geq 1 \text{ — натуральне число.}$$

$$\text{Наприклад, } \sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2; \sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3.$$

Для коренів непарного степеня:

$$\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}, k \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Наприклад, } \sqrt[3]{-1} = -\sqrt[3]{1} = -1; \sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2.$$



Задача 1. Знайдіть арифметичне значення кореня:

$$1) \sqrt[3]{125}; 2) \sqrt[6]{64}; 3) \sqrt[8]{x^8}; 4) \sqrt[4]{(2-\pi)^4}; 5) \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}; 6) \sqrt[6]{a^2}.$$

Розв'язання. За означенням значення арифметичного кореня невід'ємні, тому:

$$\begin{aligned} 1) \sqrt[3]{125} &= \sqrt[3]{5^3} = 5; & 4) \sqrt[4]{(2-\pi)^4} &= |2-\pi| = \pi-2; \\ 2) \sqrt[6]{64} &= \sqrt[6]{2^6} = 2; & 5) \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} &= |\sqrt{5}-2| = \sqrt{5}-2; \\ 3) \sqrt[8]{x^8} &= |x|; & 6) \sqrt[6]{a^2} &= \sqrt[3]{|a|} = \begin{cases} \sqrt[3]{a}, & \text{якщо } a \geq 0; \\ -\sqrt[3]{a}, & \text{якщо } a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$



Задача 2. За яких значень змінних вираз є арифметичним коренем:

$$1) \sqrt[5]{x-1}; \quad 2) \sqrt{a+1}?$$

Розв'язання. За означенням арифметичного кореня підкореневий вираз має бути невід'ємним, тому:

$$1) x-1 \geq 0; x \geq 1; [1; +\infty); \quad 2) a+1 \geq 0; a \geq -1; a \in [-1; +\infty).$$

3. ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО КОРЕНЯ n -ГО СТЕПЕНЯ І ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Розглянемо без доведення властивості арифметичних коренів n -го степеня ($n > 1$ — натуральне число), які узагальнюють відомі властивості квадратного кореня.



1. Якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, то

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}. \quad (1)$$

Корінь n -го степеня з добутку невід'ємних чисел дорівнює добутку коренів з цих чисел.

$$\text{Наприклад, } \sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6.$$



Наведена властивість є правильною для будь-якої скінченної кількості невід'ємних чисел.

Наприклад, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$ і $c \geq 0$, то

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{(ab)c} = \sqrt[n]{ab} \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{c}, \text{ тобто } \sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{c}.$$



2. Якщо $a \geq 0$, $b > 0$, то

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \quad (2)$$

Корінь n -го степеня з дробу, чисельник якого невід'ємний, а знаменник додатний, дорівнює кореню з чисельника, поділеному на корінь із знаменника.

$$\text{Наприклад, } \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}.$$

Якщо формули (1) і (2) записати у вигляді

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}, \quad a \geq 0 \text{ і } b \geq 0; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad a \geq 0 \text{ і } b > 0,$$

то одержимо правила множення і ділення арифметичних коренів n -го степеня. Сформулюйте ці правила самостійно.

3. Якщо $n > 1, k > 1$ — натуральні числа і $a \geq 0$, то

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}. \quad (3)$$

Корінь n -го степеня з кореня k -го степеня невід'ємного числа a дорівнює кореню nk -го степеня із цього числа.

Наприклад, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[3 \cdot 4]{a} = \sqrt[12]{a}.$

4. Якщо $n > 1, k$ і m — натуральні числа і $a \geq 0$, то:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}. \quad (4)$$

Якщо показник кореня й показник степеня підкореневого виразу помножити або поділити на одне й те саме натуральне число, то значення кореня не зміниться.

Наприклад, $\sqrt[8]{3^6} = \sqrt[4]{3^3}.$

Властивість 4 іноді називають *основною властивістю арифметичного кореня*.

5. Якщо $n > 1, k > 1$ — натуральні числа і $a \geq 0$, то

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}. \quad (5)$$

Щоб піднести корінь n -го степеня до степеня k , достатньо піднести до цього степеня підкореневий вираз.

Наприклад, $(\sqrt[6]{8})^2 = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{64} = 2.$

6. Якщо $0 \leq a < b$, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$. (6)

Властивість 6 надає можливість порівнювати арифметичні корені.

Задача 3. Порівняйте числа:

1) $\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[4]{7}$ і $\sqrt[4]{80}$; 3) $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt[5]{4}$ і $\sqrt[3]{3}$.

Розв'язання. Зведемо корені в кожному завданні до одного показника, користуючись основною властивістю арифметичного кореня:

1) $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$, отже, $\sqrt{2} > \sqrt[4]{3}$;

2) $\sqrt[4]{7} = \sqrt[8]{49}$, $\sqrt[4]{80} = \sqrt[8]{80}$, тобто $\sqrt[4]{80} > \sqrt[4]{7}$;

3) $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{4}$, $\sqrt{3} = \sqrt[6]{27}$ і $\sqrt{3} > \sqrt[3]{2}$;

4) $\sqrt[5]{4} = \sqrt[15]{64}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[15]{243}$, тобто $\sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{4}$.

4. ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ КОРЕНЯ n -ГО СТЕПЕНЯ

Під час розв'язування задач часто доводиться виконувати такі перетворення: 1) виносити множник з-під знака кореня; 2) вносити множник під знак кореня; 3) позбуватися ірраціональності в знаменнику дробу. Розглянемо приклади.

Задача 4. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt{108}$; 2) $\sqrt[3]{512}$; 3) $\sqrt[4]{324}$.

Розв'язання. Виконуючи цю дію, підкореневий вираз слід подати у вигляді добутку множників, з яких (одного або кількох) можна добути корінь.

1) $\sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}$; 3) $\sqrt[4]{324} = \sqrt[4]{81 \cdot 4} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 2^2} = 3\sqrt{2}.$

2) $\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{8^3} = 8$;



Чи завжди можна винести множник з-під знака кореня? Ні. Наприклад, у виразі $\sqrt[3]{10}$ не можна винести множник з-під знака кореня, оскільки число 10 не можна подати як добуток чисел, з яких хоча б одне є кубом деякого числа.

Задача 5. Внесіть множник під знак кореня:

1) $5\sqrt{3}$; 2) $6 \cdot \sqrt[3]{1\frac{1}{9}}$; 3) $-2 \cdot \sqrt[4]{8}$.

Розв'язання. Вносячи множник під знак кореня, треба піднести його до степеня, який дорівнює показнику кореня, і записати як множник під знаком кореня.

1) $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$; 3) $-2 \cdot \sqrt[4]{8} = -1 \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{8} = -\sqrt[4]{2^4 \cdot 8} = -\sqrt[4]{16 \cdot 8} = -\sqrt[4]{128}.$

2) $6 \cdot \sqrt[3]{1\frac{1}{9}} = \sqrt[3]{6^3 \cdot \frac{10}{9}} = \sqrt[3]{240}$;



Під знак кореня парного степеня можна вносити тільки невід'ємне число.

Задача 6. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{a^4}{\sqrt[3]{a^5}}$; 3) $\frac{m-n}{\sqrt{m-n}}$; 4) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}.$

Розв'язання. Звільнюючись від ірраціональності в знаменнику дробу, необхідно чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те саме число або вираз, відмінний від нуля.

$$1) \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \sqrt{3}; \quad 2) \frac{a^4}{\sqrt[3]{a^5}} = \frac{a^4 \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^5 \sqrt[3]{a^2}}} = \frac{a^4 \sqrt[3]{a^2}}{a} = a^3 \sqrt[3]{a^2};$$

$$3) \frac{m-n}{\sqrt{m-n}} = \frac{(\sqrt{m-n})^2}{\sqrt{m-n}} = \sqrt{m-n};$$

$$4) \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{5}(\sqrt{3}+\sqrt{2}).$$



Дізнайтеся більше

1. Розглянемо застосування властивостей коренів у складніших випадках.

1) Обчисліть значення виразу: $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Розв'язання. Виконаємо віднімання дробів:

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 - (\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}{\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}} = 2\sqrt{3}.$$

2) Спростіть вираз $\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{4}{a-1} \right)^{-3}$, $a \geq 0$, $a \neq 1$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо суму перших двох дробів, а потім від неї віднімемо третій дріб:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{4}{a-1} \right)^{-3} &= \left(\frac{(\sqrt{a}+1)^2 + (\sqrt{a}-1)^2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} - \frac{4}{a-1} \right)^{-3} = \\ &= \left(\frac{(\sqrt{a}+1)^2 + (\sqrt{a}-1)^2}{a-1} - \frac{4}{a-1} \right)^{-3} = \left(\frac{a+2\sqrt{a}+1+a-2\sqrt{a}+1-4}{a-1} \right)^{-3} = \\ &= \left(\frac{2a+2-4}{a-1} \right)^{-3} = \left(\frac{2a-2}{a-1} \right)^{-3} = \left(\frac{2(a-1)}{a-1} \right)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$



Пригадайте головне

1. Дайте означення кореня n -го степеня з дійсного числа a . Наведіть приклади.
2. Що називають арифметичним коренем n -го степеня із числа $a \geq 0$? Наведіть приклади.
3. Назвіть основні властивості арифметичного кореня n -го степеня. Для яких перетворень коренів їх застосовують?

Розв'яжіть задачі



53'. Чи правильно, що:

- 1) числа 3 і -3 є коренями другого степеня з числа 9;
- 2) числа 4 і -4 є коренями другого степеня з числа 8;
- 3) числа 2 і -2 є коренями третього степеня з числа 8;
- 4) число 0 є коренем n -го степеня з числа 0?

54'. Чи правильно, що:

- 1) число -3 є арифметичним коренем другого степеня з числа 9;
- 2) число 2 є арифметичним коренем третього степеня з числа 8;
- 3) число -4 є арифметичним коренем другого степеня з числа 16;
- 4) число $\frac{1}{2}$ є арифметичним коренем третього степеня з числа $-\frac{1}{8}$;
- 5) число $-\frac{1}{2}$ є арифметичним коренем другого степеня з числа $\frac{1}{4}$;
- 6) число 0 є арифметичним коренем n -го степеня з числа 0?

55'. Назвіть підкореновий вираз арифметичного кореня n -го степеня та його степінь: 1) $\sqrt[8]{3}$; 2) $\sqrt[5]{0}$; 3) $\sqrt[12]{21}$; 4) $\sqrt{\frac{3}{25}}$; 5) $\sqrt{b+1}$; 6) $\sqrt[3]{ax}$.

56'. Чи правильні такі рівності:

$$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt[3]{-27} = -3, \quad \sqrt{16} = -4, \quad \sqrt{-9} = -3, \quad \sqrt{(-2)^4} = (-2)^2?$$

Відповідь обґрунтуйте.

57'. Обчисліть значення виразу:

$$\begin{aligned} 1) \sqrt{4 \cdot 36}; \quad 4) \sqrt[3]{64}; \quad 7) (\sqrt{2} - \sqrt{6})^2; \\ 2) \sqrt[3]{-\frac{8}{125}}; \quad 5) (\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3}); \quad 8) \sqrt{200^2 - 56^2}; \\ 3) (\sqrt{5})^4; \quad 6) (3\sqrt{18} - 5\sqrt{64}) \cdot \sqrt{2}; \quad 9) \sqrt[3]{16\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

58'. Знайдіть значення арифметичного кореня:

$$1) \sqrt[3]{27}; \quad 2) \sqrt[5]{32}; \quad 3) \sqrt{(-2)^2}; \quad 4) \sqrt[4]{(-5)^4}; \quad 5) \sqrt{(-3)^2} + \sqrt[3]{8}; \quad 6) \sqrt{(\pi-4)^2}.$$

59'. Порівняйте числа:

$$1) \sqrt{3} \text{ і } 0; \quad 2) 0 \text{ і } -\sqrt{6}; \quad 3) \sqrt{100} \text{ і } -10; \quad 4) -4 \text{ і } \sqrt{2}; \quad 5) \sqrt{5} \text{ і } 2; \quad 6) 5 \text{ і } \sqrt{24}.$$



60'. Яке із чисел більше: 1) $\sqrt[20]{20}$ чи $\sqrt[5]{5}$; 2) $4\sqrt[3]{3}$ чи $2\sqrt[3]{25}$?

61'. Порівняйте числа: 1) 0 і $\sqrt{0,01}$; 2) $\sqrt{15}$ і $-\sqrt{17}$.

62'. Винесіть множник з-під знака кореня:

$$1) \sqrt[3]{54}; \quad 2) \sqrt[4]{64}; \quad 3) \sqrt{200}; \quad 4) \sqrt[4]{16a}; \quad 5) \sqrt[3]{\frac{2}{125}}.$$



63'. Винесіть множник з-під знака кореня: 1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt[3]{32}$; 3) $\sqrt[4]{72}$.

64. Який знак має різниця: 1) $2\sqrt{2} - \sqrt[4]{65}$; 2) $\sqrt[6]{32} - 2\sqrt[8]{2}$?

65. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[3]{8m^3n^9}$; 3) $\sqrt{4(3 - \sqrt{10})^2}$; 5) $\sqrt[3]{\sqrt{17} + 3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17} - 3}$.

2) $\frac{3}{x} \sqrt{\frac{a^5 x^2}{18}}$; 4) $\sqrt[3]{27(1 - \sqrt{3})^3}$;

66. Спростіть вираз: 1) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$; 2) $\frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{3} - 1}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}} \cdot \sqrt[6]{a^5}}{(\sqrt{a}\sqrt{a})^{-2}}$.

67*. Чи різні області визначення мають функції:

1) $f(x) = \sqrt[6]{4 - x^2}$ та $\varphi(x) = \sqrt[3]{4 - x^2}$;

2) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1}$ та $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2 + 1}}$?

68*. Доведіть тотожність:

1) $\frac{a - x}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{a^3} - \sqrt{x^3}}{a - x} = \frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}}$; 4) $\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{a}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{a}}} - \frac{\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}}{a - 1} = \frac{2}{1 - a}$;

2) $\frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} + \frac{1}{7 - 4\sqrt{3}} = 14$;

5) $\left(\frac{\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}} \right)^{-4} = \frac{a}{b}$.

3) $\frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{\sqrt{3 - \sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{\sqrt{3 + \sqrt{5}}} = 3$;

69*. Звільніться від ірраціональності в знаменнику:

1) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{5} + 2}}$;

2) $\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$;

3) $\frac{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}}$.

Проявіть компетентність

70. У квартирі дві кімнати мають форму квадрата. Площа однієї з кімнат дорівнює 25 м^2 , а другої — 16 м^2 . На скільки гривень більше доведеться заплатити за плінтус для стелі більшої кімнати, аніж меншої, якщо ціна 1 шт плінтуса завдовжки 2 м становить 7,50 грн?

71. Стовбуром дерева з ґрунту до його крони піднімається вода, яку через листя випаровують промені Сонця. Якщо вирубати дерева, то ця вода буде накопичуватися в ґрунті, що призведе до утворення болота. Доросла береза за добу випаровує близько $15\sqrt[3]{125}$ літрів води, бук — $5\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt{10^2}$ літрів, а липа — удвічі більше за бук. Розрахуйте, скільки потрібно посадити на ділянці беріз, щоб за день випаровувалося 1500 л води, якщо на цій ділянці вже ростуть 2 буки і 3 липи.



Степінь з раціональним показником

1. ПОНЯТТЯ СТЕПЕНЯ З РАЦІОНАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Ви вже знаєте, який зміст має вираз a^n , де $a \neq 0$, якщо показник n — ціле число.

Наприклад,

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2; (-3)^2 = (-3) \cdot (-3); 5^{-3} = \frac{1}{5^3}; 7^0 = 1; 4,3^1 = 4,3,$$

тобто степінь a^n існує при довільному цілому n і дійсному $a \neq 0$.

Який зміст має степінь $a^{\frac{m}{n}}$ з довільним раціональним показником $\frac{m}{n}$?



Степенем числа $a > 0$ з раціональним показником $r = \frac{m}{n}$, де m — ціле, а $n > 1$ — натуральне число, називають число $\sqrt[n]{a^m}$, тобто $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.



За означенням степінь $a^r = a^{\frac{m}{n}}$ існує за будь-якого дробового показника $r = \frac{m}{n}$, якщо основа $a > 0$. Якщо n — парне число, то степінь $a^{\frac{m}{n}}$ має

зміст, якщо $a^m \geq 0$; якщо n — непарне число, то вираз $a^{\frac{m}{n}}$ має зміст за будь-якої основи $a \neq 0$.



Наприклад, $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$; $(-5)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-5)^3} = \sqrt[4]{-125}$ не існує;

$$9^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{9^4} = \sqrt[5]{3^8} = 3\sqrt[5]{27};$$

$$(-243)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-243)^3} = \sqrt[5]{(-3)^{15}} = (-3)^3 = -27.$$

2. ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З РАЦІОНАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Покажемо, що сформульоване означення степеня з раціональним показником зберігає основні властивості степеня з цілим показником.

Властивості степеня з раціональним показником
($a > 0$, $b > 0$, r, s — раціональні числа):

$$\begin{aligned} 1. a^r \cdot a^s &= a^{r+s}; & 2. \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s}; & 3. (a^r)^s &= a^{rs}; \\ 4. (ab)^r &= a^r b^r; & 5. \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r}. \end{aligned}$$

Для доведення цих властивостей скористаємося означенням степеня з раціональним показником і властивостями коренів.

Доведення. Нехай $r = \frac{m}{n}$ і $s = \frac{p}{q}$, де $n > 1$, $q > 1$ — натуральні числа, а m і p — цілі числа.

$$1) a^r \cdot a^s = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{r+s}.$$

Із властивості 1 випливає, що для довільного $a > 0$ і довільного раціонального числа r виконується рівність $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$. Справді, $a^{-r} \cdot a^r = a^0 = 1$.

$$2) \frac{a^r}{a^s} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = a^{r-s}.$$

$$3) (a^r)^s = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{rs}.$$

$$4) (ab)^r = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^r \cdot b^r.$$

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{a^r}{b^r}.$$

Задача 1. Обчисліть значення виразу:

$$1) \frac{8^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}; \quad 2) (0,75)^{-1} \cdot \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2,5^2.$$

Розв'язання. Скористаємося властивостями степеня з раціональним показником.

$$1) \frac{8^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{5}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{5}{3}}} = 2 \cdot 3^{-1} = \frac{2}{3}.$$

$$2) (0,75)^{-1} \cdot \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2,5^2 = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{25}{4} = \frac{25}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 25 \cdot \frac{3}{16} = 4\frac{11}{16}.$$

Задача 2. Спростіть вираз:

$$1) \frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}; \quad 2) \left(a^{-\frac{1}{5}} + a^{\frac{2}{5}}\right) \left(a^{-\frac{2}{5}} + a^{\frac{4}{5}}\right) \left(a^{\frac{2}{5}} - a^{-\frac{1}{5}}\right) \cdot a^{\frac{4}{5}}.$$

Розв'язання.

1) Віднімаємо дроб, звівши їх до спільного знаменника, а потім розкладемо чисельник утвореного дробу на множники за формулою різниці квадратів:

$$\begin{aligned} \frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} &= \frac{(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^2 - (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})^2}{(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})} = \\ &= \frac{(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})}{a - b} = \frac{4a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{a - b} = \frac{4\sqrt{ab}}{a - b}. \end{aligned}$$

2) Знайдемо спочатку добуток першого і третього множників, а потім помножимо здобутий результат на другий множник за відомою формулою різниці квадратів:

$$\begin{aligned} \left(a^{-\frac{1}{5}} + a^{\frac{2}{5}}\right) \left(a^{-\frac{2}{5}} + a^{\frac{4}{5}}\right) \left(a^{\frac{2}{5}} - a^{-\frac{1}{5}}\right) \cdot a^{\frac{4}{5}} &= \left(a^{-\frac{1}{5}} + a^{\frac{2}{5}}\right) \left(a^{\frac{2}{5}} - a^{-\frac{1}{5}}\right) \left(a^{-\frac{2}{5}} + a^{\frac{4}{5}}\right) \cdot a^{\frac{4}{5}} = \\ &= \left(a^{\frac{4}{5}} - a^{\frac{2}{5}}\right) \left(a^{-\frac{2}{5}} + a^{\frac{4}{5}}\right) \cdot a^{\frac{4}{5}} = \left(a^{\frac{4}{5}} - a^{\frac{2}{5}}\right) \left(a^{\frac{4}{5}} + a^{\frac{2}{5}}\right) \cdot a^{\frac{4}{5}} = \left(a^{\frac{8}{5}} - a^{\frac{4}{5}}\right) \cdot a^{\frac{4}{5}} = \\ &= a^{\frac{12}{5}} - a^0 = a^{\frac{12}{5}} - 1 = \sqrt[5]{a^{12}} - 1 = a^2 \sqrt[5]{a^2} - 1. \end{aligned}$$



Чи існує поняття степеня з ірраціональним показником? Так, існує. Більше того, степінь з ірраціональним показником має такі самі властивості як і степінь з раціональним показником.

Проте чинною програмою навчання математики на даному рівні його вивчення не передбачено. Втім, із загальним підходом до його тлумачення ви можете ознайомитись у матеріалі рубрики «Дізнайтеся більше».



Дізнайтеся більше

1. Корисно знати і такі властивості степеня з раціональним показником.

- $a^r > 1$, якщо $a > 1, r > 0$; $a^r < 1$, якщо $a > 1, r < 0$;
- $a^r > a^s$, якщо $a > 1, r > s$; $a^r < a^s$, якщо $0 < a < 1, r > s$;
- $a^r < b^r$, якщо $r > 0, a < b$; $a^r > b^r$, якщо $r < 0, a < b$.

Доведемо їх.

$$1) a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Якщо $r > 0$, тобто $m > 0$ і $a > 1$, то $a^m > 1$ і $a^r = \sqrt[n]{a^m} > 1$.

Аналогічно, якщо $r < 0$, тобто $m < 0$ і $a > 1$, то $a^m < 1$ і $a^r = \sqrt[n]{a^m} < 1$.

2) Зведемо раціональні числа r і s до спільного знаменника.

Нехай $r = \frac{m_1}{k}$ і $s = \frac{p_1}{k}$, де $k > 1$ — натуральне число, а m_1 і p_1 — цілі числа. З

нерівності $r > s$ випливає, що $m_1 > p_1$. Якщо $a > 1$, то $a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a} > 1$ і за властивістю степеня із цілим показником $\left(a^{\frac{1}{k}}\right)^{m_1} > \left(a^{\frac{1}{k}}\right)^{p_1}$, звідси $a^{\frac{m_1}{k}} > a^{\frac{p_1}{k}}$, тобто $a^r > a^s$.

Випадок $0 < a < 1$ розглядається аналогічно. Зробіть це самостійно.

3) Якщо $r > 0$, то $r = \frac{m}{n}$, де m і n — натуральні числа. З нерівності $0 < a < b$ і властивостей степеня із цілим показником маємо, що $a^m < b^m$. За властивістю кореня n -го степеня, із цієї нерівності випливає, що $\sqrt[n]{a^m} < \sqrt[n]{b^m}$, тобто $a^r < b^r$. Для випадку $r < 0$ доведення аналогічне. Проведіть його самостійно.

2. Розглянемо степінь a^α , де $a > 0$, $a \neq 1$, а α — довільне ірраціональне число (тобто нескінченний неперіодичний десятковий дріб). Нехай α_1 — будь-яке наближене раціональне значення числа α з недостачею, α_2 — будь-яке наближене раціональне значення числа α з надлишком.

Тоді:

а) якщо $a > 1$ і $\alpha > 0$, то $a^{\alpha_1} < a^\alpha < a^{\alpha_2}$.

Наприклад, $2^{1,7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8}$, бо $a = 2 > 1$, $\alpha = \sqrt{3}$; $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$;

$5^{1,41} < 5^{\sqrt{2}} < 5^{1,42}$, бо $a = 5 > 1$, $\alpha = \sqrt{2}$; $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$;

б) якщо $0 < a < 1$ і $\alpha > 0$, то $a^{\alpha_2} < a^\alpha < a^{\alpha_1}$.

Наприклад, $\left(\frac{1}{7}\right)^{1,5} < \left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{7}\right)^{1,4}$ бо $a = \frac{1}{7} < 1$, $\alpha = \sqrt{2}$; $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$;

в) якщо $\alpha < 0$, то $-\alpha > 0$ і $a^\alpha = \left(\frac{1}{a}\right)^{-\alpha}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Наприклад, $3^{-\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}}$.

Нерівності а) і б) визначають степінь з ірраціональним показником α через степені з раціональними показниками α_1 і α_2 з будь-якою необхідною точністю.



Пригадайте головне

1. Як визначається степінь числа з раціональним показником?
2. Чому в означенні степеня $a^{\frac{m}{n}}$ указано умову $a > 0$?
3. Які властивості має степінь числа з раціональним показником? Проілюструйте їх на прикладах.

Розв'яжіть задачі



72'. Спростіть вираз: 1) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}}$; 2) $c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{3}{2}}$; 3) $(a^{0,4})^{\frac{5}{4}}$.

73'. Спростіть вираз: 1) $\left(x^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{8}}$; 2) $b^{-0,1} : b^{-0,6}$; 3) $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{5}{3}}$.

74'. Обчисліть: 1) $(27 \cdot 64)^{\frac{1}{3}}$; 2) $25^{0,3} \cdot 5^{1,4}$; 3) $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

75'. Обчисліть: 1) $2 \cdot 27^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\sqrt[4]{9} \cdot 3^{-1,5}$; 3) $\left(\frac{1}{125} \cdot \frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$.

76'. Обчисліть: 1) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$; 2) $(2,5^{1,5} + 0,4^{1,5}) : (\sqrt{2,5} + \sqrt{0,4})$.

77'. Обчисліть: 1) $\sqrt[3]{100} \cdot (\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{7}{6}}$; 2) $27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,2}$.

78'. Спростіть вираз: 1) $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^2 - (4xy)^{\frac{1}{2}}$; 2) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)^2$;

79'. Спростіть вираз: 1) $\sqrt{b} + \sqrt{c} - \left(b^{\frac{1}{4}} + c^{\frac{1}{4}}\right)^2$; 2) $\left(x^{\frac{1}{4}} + 2\right)\left(x^{\frac{1}{4}} - 2\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + 4\right)$.

80'. Спростіть і знайдіть значення виразу:

1) $\frac{a^{\frac{5}{6}} + a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{6}} - a^{\frac{1}{3}}}$, якщо $a = 1,44$; 2) $\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x - 4} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} - 2}$, якщо $x = 9$.

81'. Спростіть і знайдіть значення виразу:

1) $\frac{m^{\frac{2}{3}} - 2,25}{m^{\frac{1}{3}} + 1,5}$, якщо $m = 8$; 2) $\frac{2}{y^4 + 3} - \frac{2}{y^4 - 3}$, якщо $y = 100$.

82. Доведіть тотожність:

1) $\frac{a - x}{a^{0,5} - x^{0,5}} - \frac{a^{1,5} - x^{1,5}}{a - x} = \frac{a^{0,5}x^{0,5}}{a^{0,5} + x^{0,5}}$; 2) $((a^3(a^2a^{0,5})^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{7}{12}}$.

83. Знайдіть значення виразу $\frac{\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{3}{4}}}$.

84. Розмістіть у порядку зростання числа:

1) $8^{\frac{1}{5}}$, $4^{\frac{1}{3}}$, $2^{\frac{3}{2}}$; 2) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-0,1}$, $\left(\frac{9}{4}\right)^{0,2}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$.

85. Спростіть вираз: 1) $\frac{\left(\sqrt[5]{x^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt[5]{x^4}\right)^3} : \frac{\left(\sqrt[4]{x\sqrt{y}}\right)^6}{\left(\sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x^2 y}}\right)^4}$; 2) $\frac{\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{-2}\right)a^2}{(a^{0,5} - b^{0,5})^2 + 2(ab)^{\frac{1}{2}}}$;

86*. Спростіть вираз: 1) $\frac{a-1}{\frac{3}{a^4} + a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a+1}} + 1$; 2) $\frac{x^{\frac{1}{2}} + 1}{x + x^{\frac{1}{2}} + 1} : \frac{1}{x^{1,5} - 1}$.

87*. Обчисліть значення виразу:

1) $(2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} (7 - 4\sqrt{3})^{\frac{1}{4}}$;

2) $\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}} - 2\right)^{\frac{1}{2}}$, якщо $x = \frac{a^3 + 1}{a^3 - 1}$;

3) $(2 + \sqrt{5})^{\frac{1}{3}} + (2 - \sqrt{5})^{\frac{1}{3}}$;

4) $\frac{m - m^{-2}}{m^{\frac{1}{2}} - m^{-\frac{1}{2}}} - \frac{2}{m^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 - m^{-2}}{m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}}}$, якщо $m = 4$.

88*. Доведіть тотожність: 1) $\frac{(a + 2\sqrt{a-1})^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt{a-1} + 1)^{\frac{1}{3}}} + \frac{(a - 2\sqrt{a-1})^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt{a-1} - 1)^{\frac{1}{3}}} = 2\sqrt{a-1}$;

2) $\frac{11 - 6\sqrt{2}}{(45 - 29\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}} = 3 - \sqrt{2}$; 3) $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

89*. Доведіть, що значення виразу $(11 + 6\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} + (11 - 6\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}$ є натуральним числом.

Проявіть компетентність

90. Маса Сонця становить приблизно $2 \cdot 10^{27}$ т, а маса Нептуна приблизно $1 \cdot 10^{23}$ т. У скільки разів маса Нептуна менша від маси Сонця.

91. Лінійні розміри атома становлять 10^{-8} см. Скільки атомів можна «вкласти» у відрізок довжиною 1 мм?



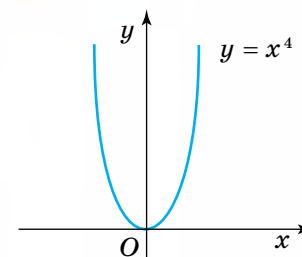
Степенева функція та її властивості



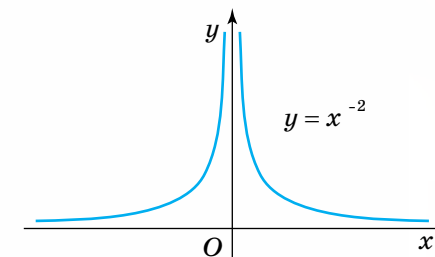
Функцію $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ називають степеневою функцією з дійсним показником α .

При довільному дійсному α степенева функція визначена на інтервалі $(0; +\infty)$. Якщо $\alpha > 0$, то степенева функція визначена і для $x = 0$, бо $0^\alpha = 0$.

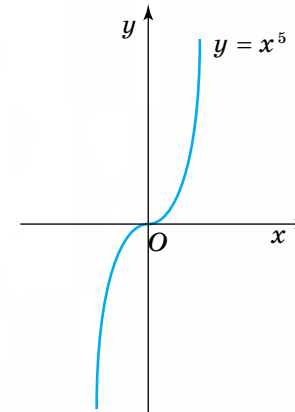
Якщо α — ціле число, $\alpha \in \mathbb{Z}$, то степенева функція визначена і для $x < 0$. Для парних α — ця функція парна (мал. 25, 26), а для непарних — непарна (мал. 27, 28).



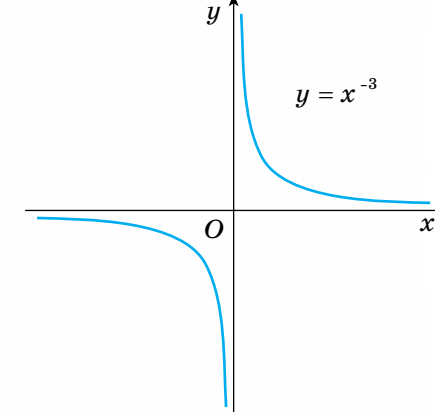
Мал. 25



Мал. 26



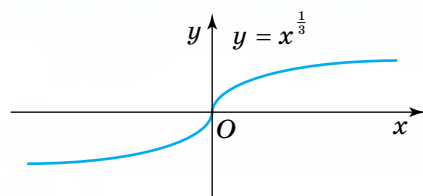
Мал. 27



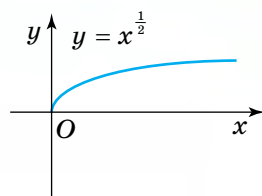
Мал. 28

Якщо α — раціональне число $\left(\alpha = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right)$, то степенева функція визначена на множині $\mathbb{R}$ за умови, що $m > 0$, а n — непарне число, і на множині $[0; +\infty)$ — за умови, що $m > 0$, а n — парне число (мал. 29, 30).

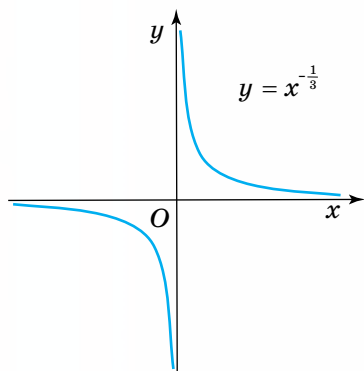
ція визначена на множині $\mathbb{R}$ за умови, що $m > 0$, а n — непарне число, і на множині $[0; +\infty)$ — за умови, що $m > 0$, а n — парне число (мал. 29, 30).



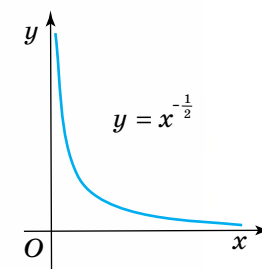
Мал. 29



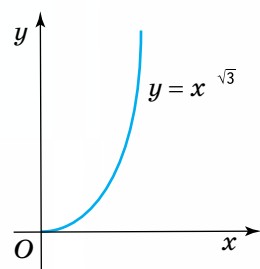
Мал. 30



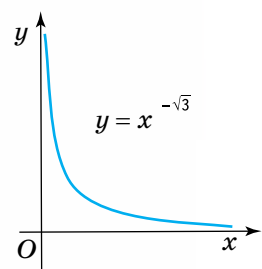
Мал. 31



Мал. 32



Мал. 33



Мал. 34

Якщо α — раціональне число $\left(\alpha = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right)$, то степенева функція визначена на множині $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ за умови, що $m < 0$, а n — непарне число, і на множині $(0; +\infty)$ — за умови, що $m < 0$, n — парне (мал. 31, 32).

За раціональних показників степенева функція є парною, якщо m — парне число, а n — непарне, і є непарною, якщо m і n — непарні числа.

Якщо α — ірраціональне число, то степенева функція визначена на множині $[0; +\infty)$ за умови, що $\alpha > 0$, і на множині $(0; +\infty)$ — за умови, що $\alpha < 0$ (мал. 33, 34).



Задача 1. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt[4]{-x} + (x-2)^{\frac{1}{6}}$; 2) $y = (-x)^{-\frac{1}{2}} + 3(2+x)^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{1}{3}}$.

Розв'язання.

1) Область визначення функції знайдемо за умови існування кожного доданку суми: $\begin{cases} -x \geq 0, \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset,$

тобто заданий аналітичний вираз функцію не задає.

2) Останній доданок суми існує за довільного дійсного значення x , тому функція існуватиме, якщо $\begin{cases} -x > 0, \\ 2+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; 0).$



Задача 2.

Дослідіть функцію та побудуйте її графік: 1) $f(x) = \frac{1}{x^4}$; 2) $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$.

Розв'язання.

1) Проведемо дослідження заданої степеневі функції $f(x) = \frac{1}{x^4}$.

Область визначення $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Область значень $E(f) = (0; +\infty)$, тобто графік функції розміщений над віссю Ox .

Функція парна, оскільки $f(-x) = \frac{1}{(-x)^4} = f(x)$, $x \in D(f)$, отже, її графік симетричний відносно осі Oy .

Якщо $x \rightarrow 0$ ліворуч або праворуч, то $f(x) \rightarrow +\infty$.

Якщо $x \rightarrow +\infty$, або $x \rightarrow -\infty$, то $f(x) \rightarrow 0$ (мал. 35).

2) Встановимо властивості заданої степеневі функції $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$.

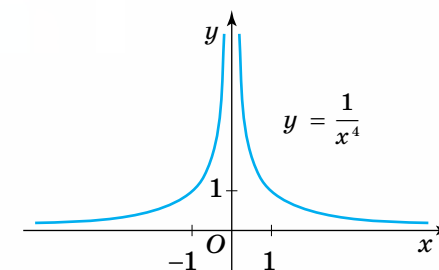
Область визначення $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Множина значень $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

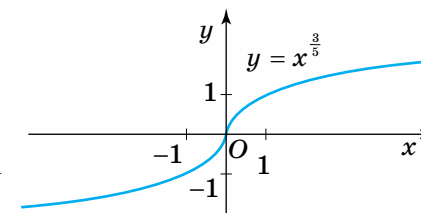
Функція непарна, оскільки $f(-x) = \sqrt[5]{(-x)^3} = -\sqrt[5]{x^3} = -f(x)$, $x \in D(f)$, отже, її графік симетричний відносно початку координат.

Графік функції перетинає вісь Ox у точці $x = 0$ (нуль функції).

Якщо $x \rightarrow +\infty$, то $f(x) \rightarrow +\infty$; якщо $x \rightarrow -\infty$, то $f(x) \rightarrow -\infty$ (мал. 36).



Мал. 35



Мал. 36



Дізнайтеся більше

Розглянемо побудову графіків складніших функцій.

1. Побудуйте графік функції:

$$1) f(x) = x^{\frac{2}{6}} + 1; \quad 2) y = |x|^{\frac{5}{4}} + 1.$$

Розв'язання.

1) За властивістю степеня маємо $y = \sqrt[6]{x^2} + 1 = \sqrt[3]{|x|} + 1$.

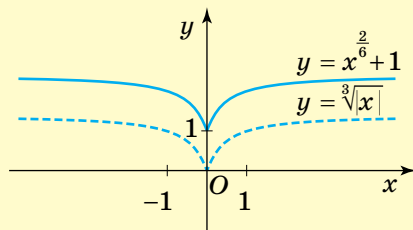
Побудуємо спочатку графік функції $y = \sqrt[3]{|x|}$. Функція визначена всюди: $D(f) = (-\infty; +\infty)$ і є парною, оскільки $f(-x) = \sqrt[3]{|-x|} = \sqrt[3]{|x|} = f(x)$, $x \in D(f)$, причому $y = \sqrt[3]{x}$, якщо $x \geq 0$. Тому побудуємо графік функції $y = \sqrt[3]{x}$ і відобразимо його симетрично відносно осі Oy . Дістанемо графік функції $y = \sqrt[3]{|x|}$. Залишається перенести цей графік уздовж осі Oy на одну одиницю вгору (мал. 37).

2) За означенням модуля дістаємо:

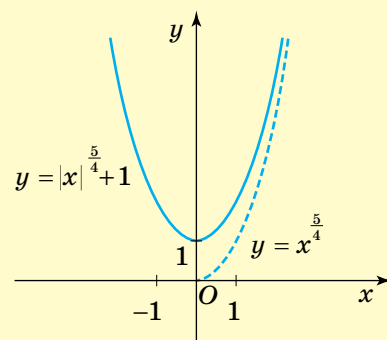
$$y = |x|^{\frac{5}{4}} + 1 = \begin{cases} x^{\frac{5}{4}} + 1, & \text{якщо } x \geq 0, \\ (-x)^{\frac{5}{4}} + 1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Шуканий графік можна одержати в результаті перетворення графіка функції $y = x^{\frac{5}{4}}$ (мал. 38).

Назвіть, які саме перетворення графіка функції $y = x^{\frac{5}{4}}$ використано.



Мал. 37



Мал. 38



Пригадайте головне

1. Яку функцію називають степеневою? Наведіть приклади.
2. Де розташований графік степеневої функції з парним додатним показником?
3. Де розташований графік степеневої функції з непарним додатним показником?
4. За якої умови степенева функція з показником $\frac{m}{n}$ є парною?
5. За якої умови степенева функція з показником $\frac{m}{n}$ є непарною?

Розв'яжіть задачі



92'. Яка з даних функцій є степеневою:

- 1) $y = x^5$;
- 2) $y = 2x^2 + 1$;
- 3) $y = \frac{1}{x^3}$;
- 4) $y = x^3 - 5$;
- 5) $y = \frac{2x}{x+1}$;
- 6) $y = x^{\frac{5}{3}}$;

93'. Яка з даних функцій визначена на множині всіх дійсних чисел:

- 1) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$;
- 2) $f(x) = x^{\frac{5}{2}}$;
- 3) $f(x) = x^{\frac{7}{5}}$;
- 4) $f(x) = x^{\frac{7}{4}}$;
- 5) $f(x) = \frac{1}{x}$;

94'. Чи належить графіку функції задана точка:

- 1) $y = \sqrt[3]{x}$, $A(8; 2)$, $B(216; 6)$, $C(27; -3)$;
- 2) $y = \sqrt[4]{x}$, $D(81; 3)$, $E(81; -3)$, $F(-16; -2)$?

95'. Яка з даних степеневих функцій зростає на інтервалі $(0; 1)$:

- 1) $f(x) = \frac{2}{x}$;
- 2) $f(x) = -\frac{2}{x}$;
- 3) $f(x) = -x^4$;
- 4) $f(x) = \sqrt{x}$;
- 5) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$;
- 6) $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$?



96'. Знайдіть область визначення функції:

- 1) $y = x^3 + 1$;
- 2) $y = \frac{1}{x-1}$;
- 3) $y = \sqrt{x^2 + 1}$;
- 4) $y = \sqrt[3]{2x + 1}$;
- 5) $y = \sqrt{x+3} + \frac{4}{x}$.

97°. Побудуйте графік функції та схарактеризуйте її властивості:

$$\begin{array}{lll} 1) y = x^4; & 3) y = -x^4 + 2; & 5) y = \frac{2}{x}; \\ 2) y = x^4 + 1; & 4) y = (x-1)^4; & 6) y = \frac{1}{x} + 1. \end{array}$$

98°. Порівняйте значення степеневих функцій:

$$\begin{array}{lll} 1) \sqrt[3]{2} \text{ і } \sqrt[3]{3}; & 3) \sqrt[5]{0,2} \text{ і } \sqrt[5]{0,3}; & 5) (-2,3)^{-3} \text{ і } \left(-\frac{1}{5}\right)^{-3}; \\ 2) \sqrt[4]{3} \text{ і } \sqrt[4]{5}; & 4) (3,1)^{-4} \text{ і } \left(5\frac{1}{3}\right)^{-4}; & 6) (-0,7)^{-6} \text{ і } \left(-\frac{1}{2}\right)^{-6}. \end{array}$$

99°. Знайдіть яке-небудь значення аргументу, за якого значення функції $y = \sqrt[4]{x}$ більше, ніж: 1) 2; 2) 3; 3) 10; 4) 10^5 .

100. Розв'яжіть графічно рівняння:

$$1) x^4 = 1; \quad 2) \sqrt[3]{x} = 2; \quad 3) \sqrt[3]{x} = -2; \quad 4) \sqrt[4]{x} = 2.$$

101. Розв'яжіть графічно нерівність:

$$1) x^4 < 1; \quad 2) \sqrt[4]{x} < 1; \quad 3) \sqrt[4]{x} > 1; \quad 4) \sqrt[3]{x} < -1.$$

102. Побудуйте графік функції та схарактеризуйте її властивості:

$$\begin{array}{lll} 1) y = x^{\frac{3}{4}}; & 3) y = x^{\frac{4}{5}}; & 7) y = \sqrt[3]{x} + 1; \\ 2) y = x^{-\frac{3}{4}}; & 4) y = x^{-\frac{5}{7}}; & 6) y = \sqrt[3]{x+1}; \quad 8) y = \sqrt[3]{x} - 2. \end{array}$$

103. Користуючись графіком функції $y = x^{\frac{1}{2}}$, знайдіть наближені значення коренів: 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{5}$.

104. Поясніть, чому правильною є нерівність:

$$1) \sqrt[10]{5} > \sqrt[10]{3}; \quad 2) \sqrt[21]{3,3} < \sqrt[21]{3,5}?$$

105*. Побудуйте графік функції та схарактеризуйте її властивості:

$$1) y = \sqrt{x^6}; \quad 2) y = -\sqrt{x^4}; \quad 3) y = |x^{-1}|; \quad 4) y = x^{\frac{12}{8}} - 1.$$

106*. Чим відрізняються графіки функцій:

$$\begin{array}{ll} 1) y = \sqrt{(x-2)^2} \text{ і } y = x-2; & 2) y = \sqrt[3]{(x+1)^3} \text{ і } y = x+1; \\ 3) y = \sqrt{(x-3)^2(x+2)^2} \text{ і } y = (x-3)(x+2)? \end{array}$$

Проявіть компетентність 

107. Чи має розв'язки рівняння:

$$1) x^{\frac{1}{2}} + (x+2)^{\frac{1}{6}} = -1; \quad 2) \sqrt{2-x} = \sqrt[4]{x-3}?$$

108. Розв'яжіть графічно рівняння: 1) $x^{\frac{1}{3}} = x$; 2) $x^{\frac{1}{3}} + x^2 = 2$.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яку залежність між змінними x і y називають функціональною? Наведіть приклади функціональних залежностей.
2. Схарактеризуйте основні способи задання функцій та проілюструйте на прикладах.
3. Що таке область визначення та область значень функції?
4. Які функції називають монотонними? Сформулюйте відповідні означення.
5. Що таке парна та непарна функції? Яку властивість мають їхні графіки?
6. Які геометричні перетворення графіка функції $y = x^3$ треба виконати, щоб побудувати графік функції $y = (x-1)^3 + 2$?
7. Що таке корінь n -го степеня із числа a ?
8. Дайте означення арифметичного кореня n -го степеня із числа $a \geq 0$?
9. Сформулюйте означення степеня з раціональним показником і назвіть його основні властивості.
10. Яку функцію називають степеневою? Наведіть приклади.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 1

Тест 1

Числові функції, їх властивості та перетворення графіків (§ 1, 2)

1° $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{2-x}}$, $D(f) = ?$.

- А. $(-\infty; 2]$. В. $(2; +\infty)$.
 Б. $(-\infty; 2)$. Г. $[2; +\infty)$.

2° Для якої з даних функцій $D(f) = (-\infty; +\infty)$?

- А. $f(x) = (x-2)^2$. В. $f(x) = \sqrt{x^2}$.
 Б. $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$. Г. $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

3° $\varphi(x) = \frac{|x|}{3x+1}$. Знайдіть $\varphi(-2)$.

- А. 0,5. В. $-\frac{2}{7}$.
 Б. $-\frac{2}{5}$. Г. $-\frac{2}{7}$.

4° Яка з таблиць визначає функцію $y = f(x)$?

A.	x	0	1	1
	y	2	1	-3
B.	x	-1	0	2
	y	1	2	3
B.	x	-2	1	3
	y	0	1	-1

5° Яка з функцій зростає на інтервалі $(0; 1)$?

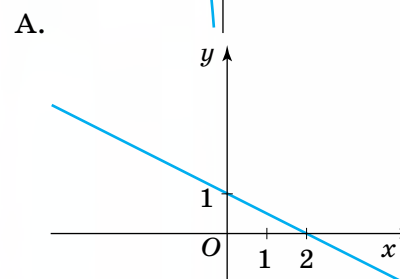
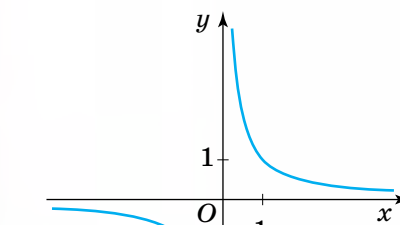
- А. $f(x) = \frac{1}{x}$.
 Б. $f(x) = -\frac{1}{x}$.
 В. $f(x) = 2x^2$.
 Г. $f(x) = x^3$.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

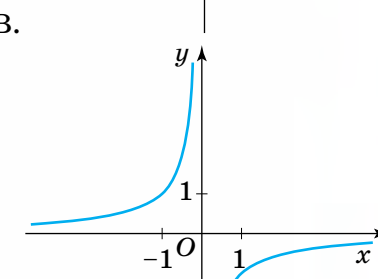
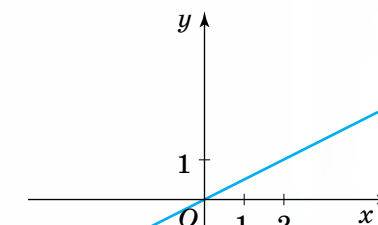
6° На малюнках подано графіки функцій:

$$y = \frac{x}{2}, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = 1 - \frac{x}{2}, \quad y = -\frac{1}{x}.$$

Знайдіть графік кожної з них. Чи є серед даних функцій немонотонна?



Г.

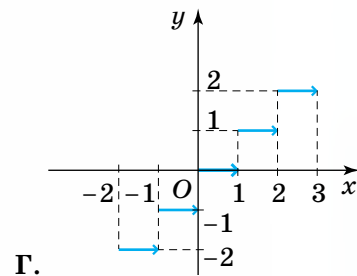
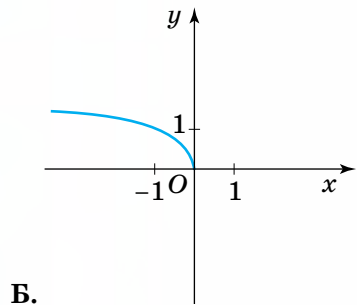
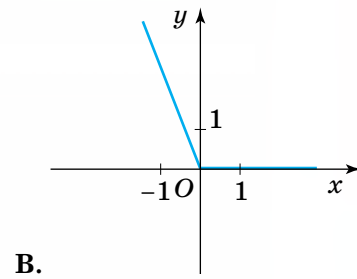
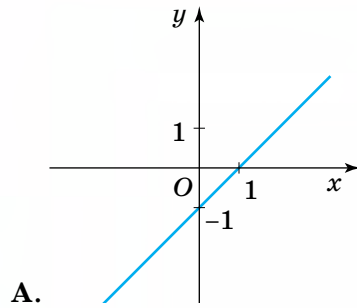


7° Яка з функцій є парною?

- А. $y = 5x^4 - x^2 + 1$.
 Б. $y = x^3 - 3x$.
 В. $y = |x - 1|$.
 Г. $y = \sqrt{x} + x$.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

8 Яка з наведених на малюнках функцій є зростаючою?



9 Графік функції $y = x$ симетрично відобразили відносно осі Oy . Графік якої функції дістали?

A. $y = -x$.

Б. $y = \frac{1}{x}$.

В. $y = |x|$.

Г. $y = 2x$.

10 Графік функції $y = x^2$ перенесено паралельно вздовж осі Oy на 2 одиниці вниз. Графік якої функції одержали?

A. $y = x^2 + 2$.

Б. $y = x^2 - 2$.

В. $y = 2x^2$.

Г. $y = \frac{x^2}{2}$.

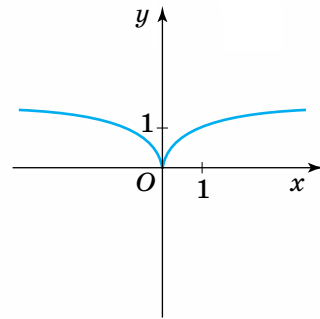
11* Графік якої функції подано на малюнку?

A. $y = \sqrt{|x|}$.

Б. $y = \sqrt{x^2}$.

В. $y = (\sqrt{x})^2$.

Г. $y = |x|$.



ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

Тест 2

Корінь n -го степеня. Арифметичний корінь n -го степеня.
Степінь з раціональним показником (§ 3, 4)

1° $\sqrt{27 \cdot 108} = ?$

A. 27.

Б. 36.

В. 54.

Г. -40.

2° Який знак нерівності слід поставити замість $*$ у виразі $\sqrt[4]{3\sqrt{2}} * \sqrt[3]{4\sqrt{5}}$?

A. $>$.

Б. $<$.

В. $\geq$.

Г. $\leq$.

3° $\sqrt[4]{10 - \sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10 + \sqrt{19}} = ?$

A. $\frac{1}{3}$.

Б. 5.

В. 3.

Г. 2.

4° $a^{\frac{2}{5}} \cdot q^{\frac{7}{8}} : a^{\frac{3}{5}} \cdot q^{\frac{1}{8}} = ?$

A. $\frac{q}{a}$.

Б. aq .

В. $\frac{a}{q}$.

Г. $-\frac{a}{q}$.

5 $\sqrt[3]{a^3} + 2\sqrt{a^2} = ?$ ($a < 0$).

A. a .

Б. $3a$.

В. $-a$.

Г. $-3a$.

6 $(\sqrt{18} - \sqrt{2})^{\frac{2}{3}} = ?$

A. -2.

Б. 0.

В. 2.

Г. 1.

7 $\left(1 + \frac{(ab^2)^{\frac{1}{3}}}{a} + \frac{(a^2b)^{\frac{1}{3}}}{b}\right) \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = ?$

A. $\frac{a^2 - b^2}{ab}$.

Б. $a^2 + b^2$.

В. $\frac{a+b}{ab}$.

Г. $\frac{a-b}{ab}$.

8* Яка з даних різниць додатна?

A. $4\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$.

Б. $2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} - 17^{\frac{1}{3}}$.

В. $2 \cdot 3^{\frac{1}{4}} - 32^{\frac{1}{6}}$.

9* Яка з даних рівностей правильна за будь-якого значення a ?

A. $\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^6 = a$.

Б. $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^4 = |a|$.

В. $(a^2)^{\frac{1}{2}} = a$.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

Тест 3

Степенева функція (§ 5)

1° $f(x) = x^5$, $D(f) = \dots$

А. $(-\infty; +\infty)$. Б. $(-\infty; 0)$. В. $[0; +\infty)$. Г. $(-\infty; 0]$.

2° Чи належить точка $A(2; 8)$ графіку функції $y = \sqrt[3]{x}$?

А. Так. Б. Ні. В. Не можна визначити.

3° $f(x) = x^{-\frac{2}{5}}$, $D(f) = \dots$

А. $(-\infty; 0)$. В. $(0; +\infty)$.
Б. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Г. $\emptyset$.

4 $f(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}} - \sqrt[4]{x-1}$, $D(f) = \dots$

А. $[1; +\infty)$. В. $(-\infty; 1)$.
Б. $(0; +\infty)$. Г. $(-\infty; 0)$.

5 Знайдіть α , якщо графік функції $y = x^\alpha$ проходить через точку $M(2; 4)$.

А. 1. Б. $\frac{1}{2}$. В. 2. Г. 0.

6* Чи правильним є твердження: графіки степеневих функцій $y = x^{\frac{6}{4}}$ та $y = x^{\frac{3}{2}}$ збігаються?

А. Так. Б. Ні. В. Не можна визначити.

Розділ 2

Тригонометричні функції

$$\frac{a}{c} = \sin A, \frac{b}{c} = \sin B; \frac{a}{c} = \cos B, \frac{b}{c} = \cos A$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

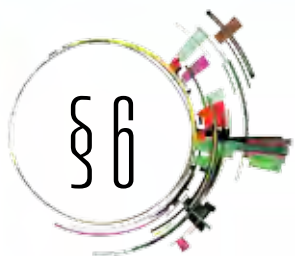
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

У розділі ви дізнаєтесь:

- ♦ що кути бувають будь-якої градусної міри;
- ♦ як знайти синус, косинус, тангенс, котангенс будь-якого кута;
- ♦ що таке тригонометричні функції числового аргументу, які вони мають властивості та які реальні процеси описують;
- ♦ які існують співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу;
- ♦ який вигляд мають графіки тригонометричних функцій, як їх будують;
- ♦ які формули називають формулами додавання, який вони мають вигляд і де застосовуються;
- ♦ які рівняння належать до тригонометричних і як їх розв'язують.



Тригонометричні функції довільного кута

1. ПРИГАДУЄМО ОСНОВНЕ ПРО СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС КУТІВ ВІД 0° ДО 180°

З курсу геометрії вам відомо, що в прямокутному $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) катет a є прилеглим до кута B і протилежним куту A (мал. 39). Відповідно катет b — прилеглий до кута A і протилежний куту B . Відомо, що відношення протилежного куту катета до гіпотенузи називається *синусом* цього кута, а відношення прилеглого до кута катета до гіпотенузи — *косинусом* кута. Тобто

$$\frac{a}{c} = \sin A, \quad \frac{b}{c} = \sin B \quad \text{і} \quad \frac{a}{c} = \cos B, \quad \frac{b}{c} = \cos A.$$

Відношення протилежного і прилеглого до кута катетів називають *тангенсом* кута, а обернене відношення — *котангенсом* кута. Отже,

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} A, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{tg} B, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} A \quad \text{і} \quad \frac{a}{b} = \operatorname{ctg} B.$$

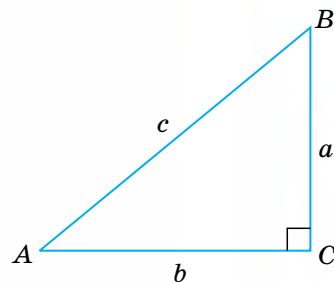
Характерно, що всі зазначені відношення залежать лише від міри відповідного кута й не залежать від довжин сторін трикутника. Це твердження було доведено у 8 класі.

Із цього випливає, що будь-якому гострому куту відповідає єдине значення його синуса (косинуса, тангенса, котангенса). Отже, синус, косинус, тангенс і котангенс є *функціями гострого кута*.

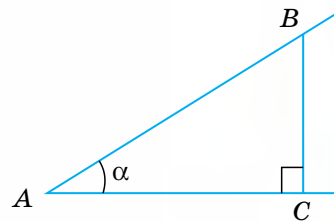
З огляду на це, щоб знайти, наприклад, значення синуса даного гострого кута α , достатньо побудувати прямокутний трикутник із цим кутом (мал. 40), виміряти довжини сторін BC і AB та обчислити відношення цих довжин. Аналогічно, користуючись означенням, можна за цим самим малюнком знайти косинус, тангенс і котангенс кута α .

У подальшому поняття синуса, косинуса, тангенса, котангенса було поширено і на кути α , міри яких лежать у межах від 0° до 180° . Це зроблено на основі таких означень (мал. 41):

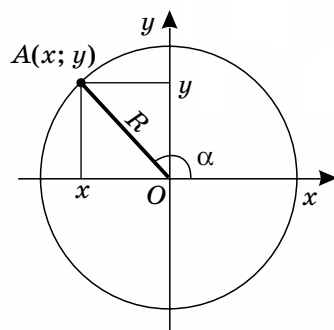
$$\sin \alpha = \frac{y}{R}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{R}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y},$$



Мал. 39



Мал. 40



Мал. 41

де R — радіус кола із центром у початку координат; x і y — відповідно абсциса й ордината точки перетину сторони OA кута α із цим колом.

Неважко помітити, що у випадку $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ такі означення за змістом збігаються з означеннями синуса, косинуса, тангенса гострого кута прямокутного трикутника, бо тоді абсциса й ордината точки A дорівнюють довжинам відповідних катетів прямокутного $\triangle AOB$, а радіус кола — його гіпотенузі (мал. 42).

Можна показати, що і для кутів $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ значення синуса, косинуса, тангенса не залежать від довжини радіуса кола, а залежать лише від міри кута.

З прийнятих означень випливає, що синус, косинус, тангенс і котангенс гострого кута додатні. Якщо кут тупий, то його синус додатний, а косинус, тангенс і котангенс — від'ємні. Обґрунтуйте ці твердження самостійно.

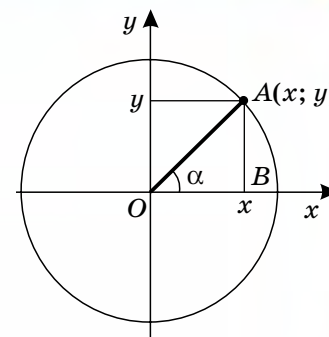
У різних сферах життя, зокрема в техніці, доводиться мати справу з кутами, міра яких не обмежується 180° . Як розуміють такі кути?

2. ДЕЩО НОВЕ ПРО КУТИ

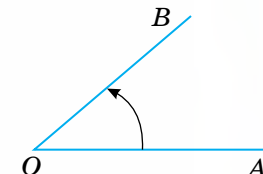
Вам відомо, що кутом називають фігуру, утворену двома променями, які мають спільний початок. У той самий час будь-який кут, наприклад AOB , може бути утворений поворотом променя OA навколо точки O в напрямку, вказаному стрілкою на малюнку 43. Очевидно, що внаслідок повороту променя може утворитися кут, більший за 180° (мал. 44). Якщо продовжити повертати промінь після положення OB , то, зробивши повний оберт (360°), він повернеться в те саме положення. Таке саме положення він займе, зробивши будь-яку кількість k повних обертів ($360^\circ k$). Кожному положенню променя OB відповідатиме певний кут. Градусну міру таких кутів можна обчислити за формулою: $\alpha + 360^\circ k$, де α — градусна міра початкового кута AOB ; k — кількість обертів (мал. 45).

При зазначеному трактуванні кута промінь OA називатимемо початковим променем, промінь OB — кінцевим, або рухомим, променем, бо він займає різні положення залежно від кута повороту.

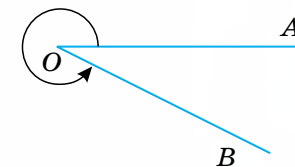
Позначимо на осі Ox праворуч від початку координат точку A і проведемо через неї коло із центром у точці O (мал. 46). Радіус OA називатимемо *почат-*



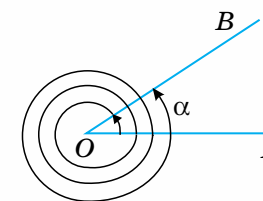
Мал. 42



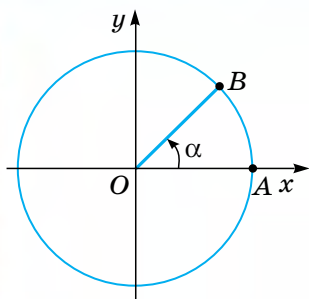
Мал. 43



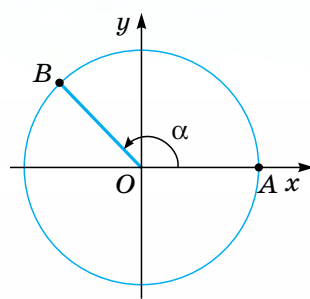
Мал. 44



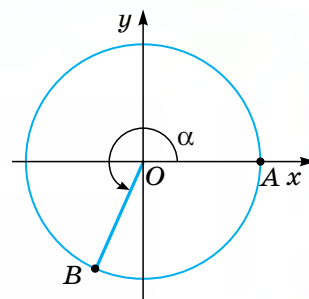
Мал. 45



Мал. 46



Мал. 47



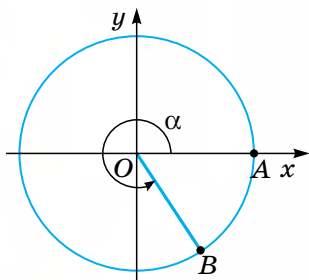
Мал. 48

ковим радіусом. Повернемо початковий радіус OA навколо точки O проти руху годинникової стрілки на кут α . Радіус OA перейде в радіус OB , який називатимемо *рухомих (кінцевим) радіусом*. Залежно від того, у якій координатній чверті розміщений радіус OB , кут α називають кутом цієї чверті. На малюнках 46—49 зображено кути I, II, III і IV чвертей відповідно.

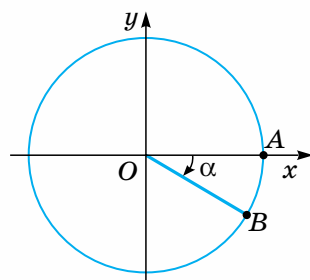
Домовимося кут α вважати додатним, якщо він утворюється поворотом початкового радіуса проти руху годинникової стрілки, і від'ємним, якщо він утворюється поворотом початкового радіуса за рухом годинникової стрілки. На малюнках 46—49 кут α додатний, а на малюнку 50 — від'ємний.

Якщо рухомий радіус займає положення OB або OB' , то позначені на малюнку 51 кути дорівнюють відповідно 90° і 270° . Тим самим положенням рухомого радіуса відповідають від'ємні кути -270° і -90° (мал. 52).

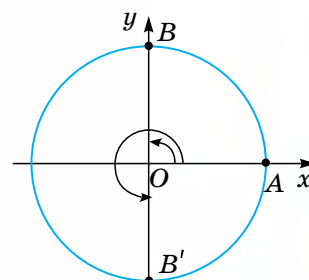
На малюнку 53 зображено кути 180° і -180° , а на малюнку 54 — кути 360° і -360° .



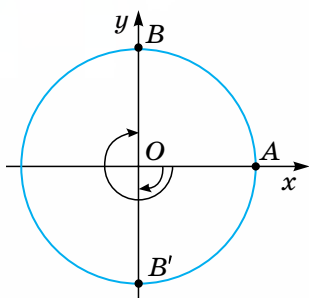
Мал. 49



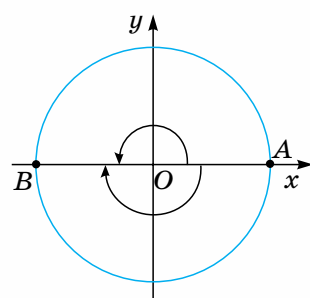
Мал. 50



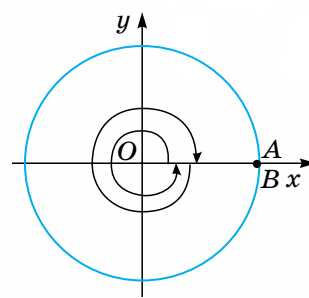
Мал. 51



Мал. 52



Мал. 53



Мал. 54

Положенню рухомого (кінцевого) радіуса, коли він збігається з початковим, відповідає й кут 0° .

Кути $0^\circ, \pm 90^\circ, \pm 180^\circ, \pm 270^\circ, \pm 360^\circ$ не належать жодній чверті.

Варто пам'ятати, що множину всіх кутів, які відповідають, наприклад, положенню рухомого радіуса OB на малюнку 56, можна задати формулою: $\alpha = 90^\circ + 360^\circ k$, де k — ціле число ($k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$). Якщо k — невід'ємне число, то маємо множину додатних кутів, зокрема, $k = 0, \alpha = 90^\circ + 360^\circ \cdot 0 = 90^\circ$; $k = 1, \alpha = 90^\circ + 360^\circ \cdot 1 = 450^\circ$; $k = 2, \alpha = 90^\circ + 360^\circ \cdot 2 = 810^\circ$ і т. д.

Якщо ж k — від'ємне число, то дістанемо множину від'ємних кутів, що відповідають зазначеному положенню рухомого радіуса OB , зокрема $k = -1, \alpha = 90^\circ + 360^\circ \cdot (-1) = -270^\circ$; $k = -2, \alpha = 90^\circ + 360^\circ \cdot (-2) = 90^\circ - 720^\circ = -630^\circ$ і т. д.

Досі ви мали справу з тригонометричними функціями кутів від 0° до 180° . Оскільки існують кути будь-якої градусної міри, а також додатні та від'ємні, природно ввести означення тригонометричних функцій довільного кута. При цьому слід враховувати, що вони не повинні суперечити тим, які прийнято для кутів від 0° до 180° .

3. ПОНЯТТЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДОВІЛЬНОГО КУТА

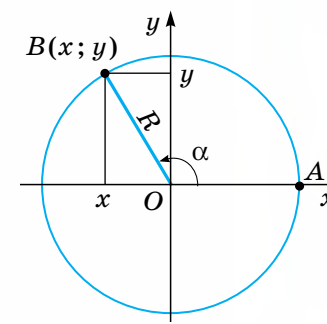
Нехай радіус кола із центром у початку координат дорівнює R , а координати точки B — кінця рухомого радіуса, що утворює кут α з додатною піввіссю Ox , дорівнюють x (абсциса) та y (ордината) (мал. 55).

Синусом кута α називається відношення ординати кінця рухомого радіуса, що утворює цей кут з додатною піввіссю Ox , до довжини цього радіуса: $\sin \alpha = \frac{y}{R}$.

Косинусом кута α називається відношення абсциси кінця рухомого радіуса, що утворює цей кут з додатною піввіссю Ox , до довжини цього радіуса: $\cos \alpha = \frac{x}{R}$.

Тангенсом кута α називається відношення ординати кінця рухомого радіуса, що утворює цей кут з додатною піввіссю Ox , до його абсциси: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$.

Котангенсом кута α називається відношення абсциси кінця рухомого радіуса, що утворює цей кут з додатною піввіссю Ox , до його ординати: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$.



Мал. 55

Наведене вище означення тангенса кута можна замінити рівносильним йому:



тангенсом кута α називається відношення синуса цього кута до його косинуса.

Справді, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{y}$. Поділивши чисельник і знаменник цього дробу на

додатне число R , дістанемо: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{y}{R}}{\frac{x}{R}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

Аналогічно: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.



Дізнайтеся більше

Вчення про тригонометричні функції сягає в давнину. Його виникнення пов'язане з астрономічними обчисленнями. З деякими тригонометричними відомостями були обізнані древні вавилоняни та єгиптяни. Але основна заслуга в розвитку тригонометрії як обчислювального апарату астрономії належить стародавнім грекам. Вони, зокрема, розглядали і встановили залежність між довжиною хорди і градусною мірою дуги кола, яку стягує ця хорда. Грецький астроном Гіппарх уже в II ст. до н. е. склав таблицю довжин хорд, відповідних градусним мірам дуг, які вони стягують. Подальший внесок у розвиток тригонометрії в IX—XV ст. зробили вчені Ближнього та Середнього Сходу.

Сучасні назви тригонометричних функцій були дані в період XV—XVII ст. європейськими вченими. Так, термін «тангенс» було введено в XV ст. німецьким астрономом і математиком Йоганом Мюллером, відомим більше під псевдонімом Регіомонтан. У XVII ст. англійський астроном і математик Едмонд Гюнтер увів терміни «косинус» і «котангенс». Сучасні позначення синуса і косинуса знаками $\sin$ і $\cos$ уперше вжиті швейцарським математиком Йоганом Бернуллі в листі до Л. Ейлера в 1739 р.



Пригадайте головне

1. Схарактеризуйте послідовність і сутність розширення поняття синуса, косинуса, тангенса, котангенса кута від гострого кута до довільного.
2. Поясніть твердження: синус, косинус, тангенс, котангенс є функціями кута.
3. Чи можуть значення тригонометричних функцій кута трикутника бути від'ємними?